

第2讲 期末复习

一、 相交线与平行线

1. 对顶角与邻补角

①对顶角

定义：两直线相交所成的四个角中，一个角的两边与另一个角的两边互为反向延长线，这两个角叫做对顶角。

性质：对顶角相等。

②邻补角

定义：两直线相交所成的四个角中，两个角有一条公共边，另一边互为反向延长线，这两个角叫做邻补角。

性质：邻补角互补。

【注意】相等的角不一定是对顶角，互补的角不一定是邻补角，对顶角和邻补角不只是数量上的关系，更是位置上的关系。

2. 垂线

①定义：两条直线相交所成的四个角中，有一个角是直角，就说这两条直线互相垂直其中一条直线是另一条直线的垂线；

②性质：

性质1：在同一平面内，过直线外或直线上一点，有且只有一条直线与已知直线垂直；

性质2：连接直线外一点与直线上各点的所有线段中，垂线段最短。简称：垂线段最短。

③点到直线的距离：直线外一点到这条直线的垂线段长度，叫做点到直线的距离。

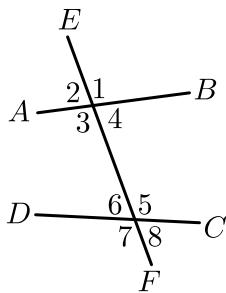
【注意】距离是指线段的长度，是一个数量；线段是图形，它们之间不能等同。

3. 三线八角(两条直线被第三条直线所截)

①同位角：两个角分别在两条直线的同侧，并且在第三条直线的同旁，叫做同位角。如图所示， $\angle 1$ 与 $\angle 5$ ， $\angle 2$ 与 $\angle 6$ ， $\angle 3$ 与 $\angle 7$ ， $\angle 4$ 与 $\angle 8$ 都是同位角。形似“F”；

②内错角：两个角都在两条直线之间，并且在第三条直线的两旁，位置交错，叫做内错角。如图所示， $\angle 3$ 与 $\angle 5$ ， $\angle 4$ 与 $\angle 6$ 都是内错角。形似“Z”；

③同旁内角；两个角都在两条直线之间，并且都在第三条直线的同旁，叫做同旁内角．如图所示， $\angle 3$ 与 $\angle 6$ ， $\angle 4$ 与 $\angle 5$ 都是同旁内角．形似“U”．



4. 平行线

①定义：在同一平面内，不相交的两条直线叫做平行线，直线与直线互相平行，记作；

【注意】必须强调在同一平面内，否则无法说明平行；

②平行公理：经过直线外一点，有且只有一条直线与已知直线平行；

【注意】点必须在直线外，而不能在直线上；

③平行公理的推论：如果两条直线都与第三条直线平行，那么这两条直线也相互平行，即“平行于同一条直线的两直线平行”．

5. 两条直线的位置关系

在同一平面内，不重合的两条直线位置关系只有两种：相交和平行．

【注意】判断同一平面内两条直线的位置关系时，可以根据它们的公共点的个数来确定：

①有且只有一个公共点，两直线相交；

②无公共点，两直线平行．

6. 两直线平行的判定方法

①平行线的定义；

②平行公理的推论；

③同位角相等，两直线平行；

④内错角相等，两直线平行；

⑤同旁内角互补，两直线平行．

7. 平行线的性质

①两直线平行，同位角相等；

②两直线平行，内错角相等；

③两直线平行，同旁内角互补．

8. 平移变换

1、平移的定义：在平面内，将一个图形沿某一方向移动一定的距离，这样的图形运动称为平移；

2、平移的性质：

①经过平移后，对应线段平行(或在同一直线上)且相等，对应角相等；

②经过平移后，对应点所连的线段平行(或在同一直线上)且相等．

【注意】 平移中一变是位置的变化；两不变是形状和大小不变．

9. 两条平行线间的距离

在平面内，同时垂直于两条平行线，并且夹在这两条平行线间的线段长度叫做这两条平行线间的距离．
平行线间的距离处处相等．

10. 命题

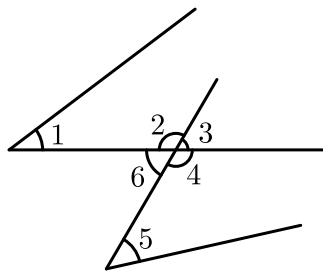
①命题：判断一件事情的语句，叫做命题．正确的命题称为真命题，错误的命题称为假命题；

②定理：从公理或其他真命题出发，判断是正确的命题，并且可以进一步作为判断其他命题真假的依据，这样的真命题叫做定理；

③命题的组成：每个命题由题设、结论两部分组成．命题通常可以写成“如果……，那么……”的形式．具有这种形式的命题中，用“如果”开始的部分是题设，用“那么”开始的部分是结论．

练习1

1. 如图所示，下列说法正确的是（ ）．



A. $\angle 1$ 和 $\angle 2$ 是内错角

B. $\angle 1$ 和 $\angle 5$ 是同位角

C. $\angle 1$ 和 $\angle 2$ 是同旁内角

D. $\angle 1$ 和 $\angle 4$ 是内错角

【答案】 C

【解析】 A、 $\angle 1$ 和 $\angle 2$ 是同旁内角，故错误；

B、 $\angle 1$ 和 $\angle 5$ 是不是同位角，故错误；

C、 $\angle 1$ 和 $\angle 2$ 是同旁内角，正确；
D、 $\angle 1$ 和 $\angle 4$ 不是内错角，故错误．
故选C

【标注】【知识点】同旁内角的定义

2. 下列命题中，真命题的个数是（ ）．

- ①如果两条直线都与第三条直线平行，那么这两条直线也互相平行
- ②两条直线被第三条直线所截，同旁内角互补
- ③两直线平行，内错角相等
- ④在同一平面内，过一点有且只有一条直线与已知直线垂直
- ⑤从直线外一点到这条直线的垂线段，叫做这点到直线的距离

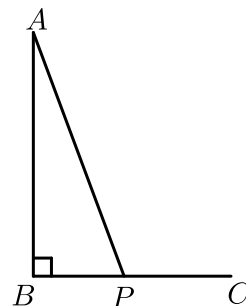
A. 1个 B. 2个 C. 3个 D. 4个

【答案】C

【解析】①平行公理推论，正确；
②两直线被截后平行，才有内错角相等，错误；
③正确；
④正确；
⑤错误，垂线段的长度，叫做点到直线的距离．

【标注】【知识点】平行线判定与性质的综合

3. 如图，已知 $AB \perp BC$ ，垂足为 B ， $AB = 3.5$ ，点 P 是射线 BC 上的动点，则线段 AP 的长不可能是（ ）．



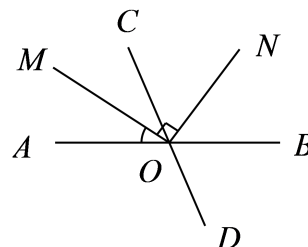
A. 3 B. 3.5 C. 4 D. 5

【答案】A

【解析】 $\because$ 点 P 是射线 BC 上的动点，
 $\therefore AP \geq AB$ ，即 $AP \geq 3.5$ 。

【标注】【知识点】垂线段最短

4. 如图，直线 AB ， CD 相交于点 O ，射线 OM 平分 $\angle AOC$ ， $ON \perp OM$ ，若 $\angle AOM = 25^\circ$ ，则 $\angle CON$ 的度数为（ ）。



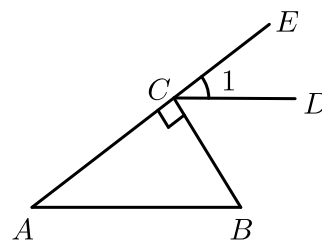
- A. 35° B. 45° C. 55° D. 65°

【答案】D

【解析】 $\because OM$ 平分 $\angle AOC$ ，
 $\therefore \angle MOC = \angle AOM = 25^\circ$ ，
又 $\because OM \perp ON$ ，
 $\therefore \angle CON = 90^\circ - 25^\circ = 65^\circ$ 。

【标注】【知识点】角的和差的计算与证明-不需要分类讨论

5. 如图， $BC \perp AE$ 于点 C ， $CD \parallel AB$ ， $\angle B = 55^\circ$ ，则 $\angle 1$ 等于（ ）。



- A. 35° B. 45° C. 55° D. 65°

【答案】A

【解析】 $\because BC \perp AE$ ，
 $\therefore \angle ACB = 90^\circ$ 。

$$\therefore \angle A + \angle B = 90^\circ .$$

$$\text{又} \because \angle B = 55^\circ ,$$

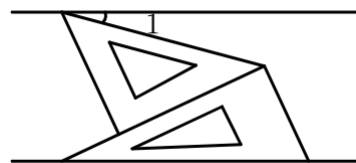
$$\therefore \angle A = 35^\circ .$$

$$\text{又} \because CD // AB ,$$

$$\therefore \angle 1 = \angle B = 35^\circ . \text{故答案为A} .$$

【标注】【知识点】平行线的性质

6. 如图，将一副三角板和一张对边平行的纸条按下列方式摆放，两个三角板的一直角边重合，含 30° 角的直角三角板的斜边与纸条一边重合，含 45° 角的三角板的一个顶点在纸条的另一边上，则 $\angle 1$ 的度数是（ ）.



A. 15°

B. 22.5°

C. 30°

D. 45°

【答案】A

【解析】如图，过A点作 $AB // a$ ，

$$\therefore \angle 1 = \angle 2 ,$$

$$\because a // b ,$$

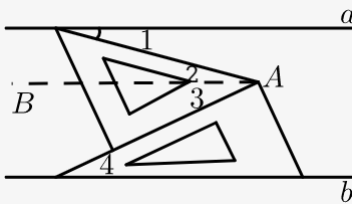
$$\therefore AB // b ,$$

$$\therefore \angle 3 = \angle 4 = 30^\circ ,$$

$$\text{而} \angle 2 + \angle 3 = 45^\circ ,$$

$$\therefore \angle 2 = 15^\circ ,$$

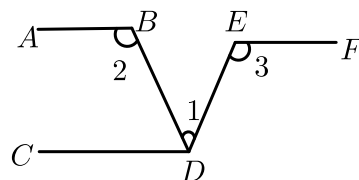
$$\therefore \angle 1 = 15^\circ .$$



【标注】【知识点】平行线的性质

【知识点】平行公理及其推论

7. 如图， $AB // CD // EF$ ，则下列各式中正确的是（ ）.



A. $\angle 1 = 180^\circ - \angle 3$

B. $\angle 1 = \angle 3 - \angle 2$

C. $\angle 2 + \angle 3 = 180^\circ - \angle 1$

D. $\angle 2 + \angle 3 = 180^\circ + \angle 1$

【答案】D

【解析】 $\because AB \parallel CD$,

$$\therefore \angle 2 + \angle BDC = 180^\circ.$$

又 $\because EF \parallel CD$,

$$\therefore \angle 3 = \angle CDE,$$

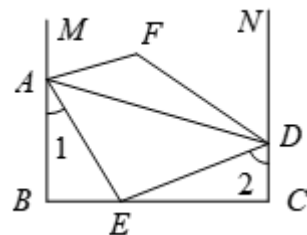
$$\text{即 } \angle 3 = \angle BDC + \angle 1,$$

$$\angle 3 = 180^\circ - \angle 2 + \angle 1,$$

$$\therefore \angle 2 + \angle 3 = 180^\circ + \angle 1.$$

【标注】【知识点】平行线的性质

8. 如图, $AB \perp BC$, AE 平分 $\angle BAD$ 交 BC 于点 E , $AE \perp DE$, $\angle 1 + \angle 2 = 90^\circ$, M 、 N 分别是 BA 、 CD 延长线上的点, $\angle EAM$ 和 $\angle EDN$ 的平分线交于点 F . $\angle F$ 的度数为().



A. 120°

B. 135°

C. 150°

D. 不能确定

【答案】B

【解析】 $\because \angle 1 + \angle 2 = 90^\circ$,

$$\therefore \angle EAM + \angle EDN = 360^\circ - 90^\circ = 270^\circ,$$

$\because \angle EAM$ 和 $\angle EDN$ 的平分线交于点 F ,

$$\therefore \angle EAF + \angle EDF = \frac{1}{2} \times 270^\circ = 135^\circ,$$

$\because AE \perp DE$,

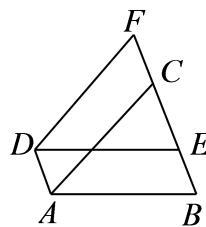
$$\therefore \angle EAD + \angle ADE = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle FAD + \angle FDA = 135^\circ - 90^\circ = 45^\circ,$$

$$\therefore \angle F = 180^\circ - (\angle FAD + \angle FDA) = 180^\circ - 45^\circ = 135^\circ.$$

【标注】【知识点】三角形内角和的应用

9. 如图，将周长为8的 $\triangle ABC$ 沿 BC 方向平移1个单位得到 $\triangle DEF$ ，则四边形 $ABFD$ 的周长为（ ）.



- A. 8 B. 9 C. 10 D. 11

【答案】C

【解析】四边形 $ABFD$ 的周长 $= AB + BF + FD + AD$ ，
 $= AB + BC + CF + AC + AD$ ，
 $= (AB + BC + AC) + CF + AD$ ，
 $= 8 + 1 + 1$ ，
 $= 10$.

【标注】【知识点】平移构造特殊图形

10. 将命题“对顶角相等”改写成“如果……，那么……”的形式为 _____ .

【答案】如果两个角是对顶角，那么这两个角相等

【解析】如果两个角是对顶角，那么这两个角相等 .

【标注】【知识点】角的表示方法

11. 若两个角的两边分别平行，而一个角比另一个角的3倍少 30° ，则两个角度数分别是 _____ .

【答案】 52.5° ， 127.5° 或 15° ， 15°

【解析】设另一个角是 x ，则另一个角是 $3x - 30^\circ$ ，

根据“若两个角的两边互相平行，则这两个角相等或互补”得：

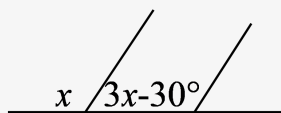
$$x = 3x - 30^\circ \text{ 或 } x + 3x - 30^\circ = 180^\circ ,$$

$$\text{解得 } x = 15^\circ \text{ 或 } x = 52.5^\circ ,$$

$$\therefore 15^\circ \times 3 - 30^\circ = 15^\circ ,$$

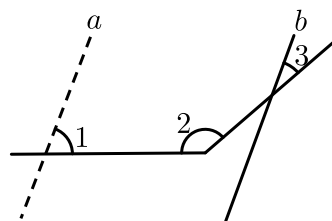
$$\therefore 52.5^\circ \times 3 - 30^\circ = 127.5^\circ ,$$

∴两个角的度数分别是 52.5° ， 127.5° 或 15° ， 15° ，
故答案为 52.5° ， 127.5° 或 15° ， 15° 。



【标注】【知识点】角的和差的计算与证明-需要分类讨论

12. 如图， $\angle 1 = 70^\circ$ ，直线 a 平移后得到直线 b ，则 $\angle 2 - \angle 3 = \underline{\hspace{2cm}}$ 。



【答案】 110°

【解析】延长直线，如图，

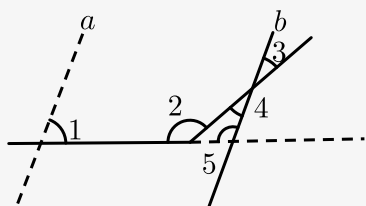
∵直线 a 平移后得到直线 b ，

∴ $a \parallel b$ ，

∴ $\angle 5 = 180^\circ - \angle 1 = 180^\circ - 70^\circ = 110^\circ$ ，

∴ $\angle 2 = \angle 4 + \angle 5$ ， $\angle 3 = \angle 4$ ，

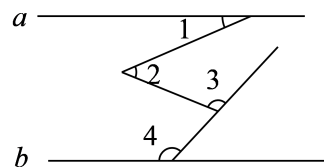
∴ $\angle 2 - \angle 3 = \angle 5 = 110^\circ$ 。



【标注】【知识点】平行线判定

【知识点】平行线的性质

13. 已知，如图，直线 $a \parallel b$ ，则 $\angle 1$ 、 $\angle 2$ 、 $\angle 3$ 、 $\angle 4$ 之间的数量关系为 $\underline{\hspace{2cm}}$ 。



【答案】 $\angle 1 + \angle 4 = \angle 2 + \angle 3$

【解析】 过点A作 $c // a$,

$$\because a // b,$$

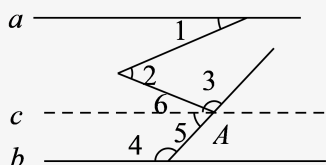
$$\therefore c // a // b,$$

$$\therefore \angle 2 = \angle 1 + \angle 6, \angle 4 + \angle 5 = 180^\circ,$$

$$\therefore \angle 6 = 180^\circ - \angle 3 - \angle 5 = 180^\circ - \angle 3 - (180^\circ - \angle 4) = \angle 4 - \angle 3,$$

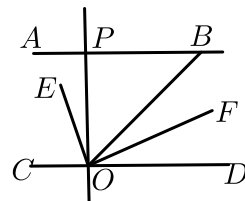
$$\therefore \angle 2 = \angle 1 + \angle 4 - \angle 3,$$

$$\therefore \angle 1 + \angle 4 = \angle 2 + \angle 3.$$



【标注】 【知识点】平行线判定

14. 如图, $AB // CD$, OE 平分 $\angle BOC$, $OF \perp OE$, $OP \perp CD$, $\angle ABO = \alpha^\circ$. 则下列结论:



① $\angle BOE = \frac{1}{2}(180 - \alpha)^\circ$;

② OF 平分 $\angle BOD$;

③ $\angle POE = \angle BOF$;

④ $\angle POB = 2\angle DOF$.

其中正确结论是 _____. (填序号)

【答案】 ①②③

【解析】 ① $\because AB // CD$, $\angle ABO = \alpha^\circ$,

$$\therefore \angle BOD = \angle ABO = \alpha^\circ,$$

$$\therefore \angle BOC = 180^\circ - \alpha^\circ,$$

$$\because OE \text{ 平分 } \angle BOC,$$

$$\therefore \angle BOE = \frac{1}{2}(180 - \alpha)^\circ, \text{ 故①正确;}$$

$$\text{② } \because OF \perp OE, OP \perp CD$$

$$\therefore \angle BOE + \angle BOF = \angle COE + \angle FOD = 90^\circ,$$

$\therefore OE$ 平分 $\angle BOC$,

$$\therefore \angle BOE = \angle COE,$$

$$\therefore \angle BOF = \angle FOD,$$

即 OF 平分 $\angle BOD$, 故②正确;

$$\textcircled{3} \because OF \perp OE, OP \perp CD,$$

$$\therefore \angle POE + \angle POF = 90^\circ,$$

$$\angle POF + \angle FOD = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle POE = \angle FOD,$$

又由②可知, OF 平分 $\angle BOD$,

$$\therefore \angle POE = \angle FOD = \angle BOF, \text{ 故③正确;}$$

$$\textcircled{4} \text{ 由①可知, } \angle BOD = \angle ABO, OF \text{ 平分 } \angle BOD,$$

$$\therefore \angle PBO = 2\angle DOF,$$

$$\therefore \angle PBO \neq \angle POB,$$

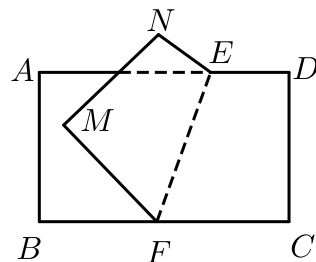
$$\therefore \angle POB \neq 2\angle DOF, \text{ 故④错误;}$$

故答案是①②③.

【标注】【知识点】平行线与角平分线综合

15. 如图, 将一张长方形的纸片沿折痕 EF 翻折, 使点 C 、 D 分别落在点 M 、 N 的位置, 且

$$\angle AEN = \frac{1}{3} \angle DEN, \text{ 则 } \angle AEF \text{ 的度数为 } \underline{\hspace{2cm}}.$$



【答案】 67.5°

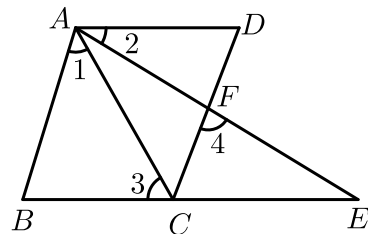
【解析】 设 $\angle DEN$ 为 $3x$, 则 $\angle AEN = \frac{1}{3} \angle DEN = x$, $3x + x = 180^\circ$, $x = 45^\circ$, $3x = 135^\circ$

$$\angle DEF = \angle NEF = \frac{360^\circ - \angle NED}{2} = \frac{360^\circ - 135^\circ}{2} = 112.5^\circ,$$

$$\therefore \angle AEF = 112.5^\circ - 45^\circ = 67.5^\circ.$$

【标注】【知识点】角的度数计算

16. 已知：如图， B 、 C 、 E 三点在同一直线上， A 、 F 、 E 三点在同一直线上， $\angle 1 = \angle 2 = \angle E$ ， $\angle 3 = \angle 4$ ，求证： $AB \parallel CD$ 。

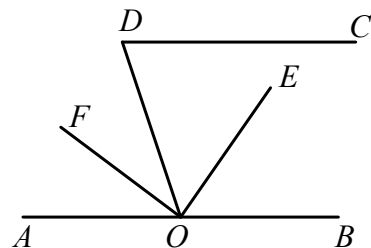


【答案】 证明见解析。

【解析】 $\because \angle 2 = \angle E$ (已知)，
 $\therefore AD \parallel BE$ (内错角相等，两直线平行)，
 $\therefore \angle 3 = \angle CAD$ (两直线平行，内错角相等)，
 $\because \angle 3 = \angle 4$ (已知)，
 $\therefore \angle 4 = \angle CAD$ (等量代换)，
 $\because \angle 1 = \angle 2$ ，
 $\therefore \angle 1 + \angle CAF = \angle 2 + \angle CAF$ (等式性质)，
 即 $\angle BAF = \angle CAD$ ，
 $\therefore \angle 4 = \angle BAF$ (等量代换)，
 $\therefore AB \parallel CD$ (同位角相等，两直线平行)。

【标注】 【知识点】平行线判定与性质的综合

17. 如图，已知 $CD \parallel AB$ ， OE 平分 $\angle BOD$ ， $OE \perp OF$ ， $\angle CDO = 62^\circ$ ，求 $\angle DOF$ 的度数。



【答案】 $\angle DOF = 31^\circ$ 。

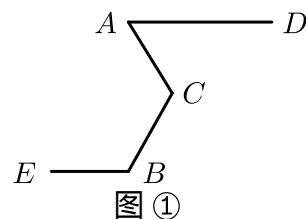
【解析】 $\because CD \parallel AB$ ，
 $\therefore \angle BOD = 180^\circ - \angle CDO = 180^\circ - 62^\circ = 118^\circ$ ，
 $\because OE$ 平分 $\angle BOD$ ，

$$\begin{aligned}\therefore \angle DOE &= \frac{1}{2} \angle BOD = \frac{1}{2} \times 118^\circ = 59^\circ, \\ \therefore OE &\perp OF, \\ \therefore \angle EOF &= 90^\circ, \\ \therefore \angle DOF &= \angle EOF - \angle DOE = 90^\circ - 59^\circ = 31^\circ.\end{aligned}$$

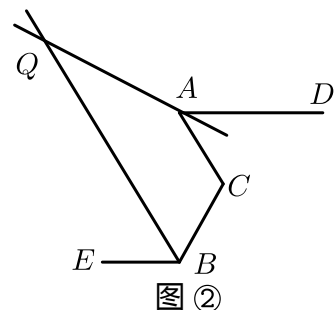
【标注】【知识点】角的和差的计算与证明-不需要分类讨论

18. 已知：点A、C、B不在同一条直线上， $AD \parallel BE$.

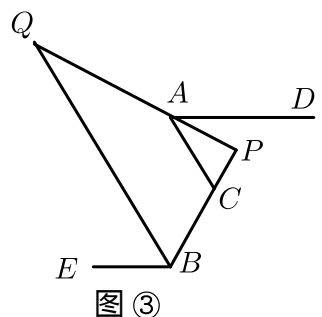
(1) 如图①，当 $\angle A = 58^\circ$ ， $\angle B = 118^\circ$ 时，求 $\angle C$ 的度数 .



(2) 如图②，AQ、BQ分别为 $\angle DAC$ 、 $\angle EBC$ 的平分线所在直线，试探究 $\angle C$ 与 $\angle AQB$ 的数量关系 .



(3) 如图③，在(2)的前提下，且有 $AC \parallel QB$ ， $QP \perp PB$ ，直接写出 $\angle DAC : \angle ACB : \angle CBE$ 的值 .

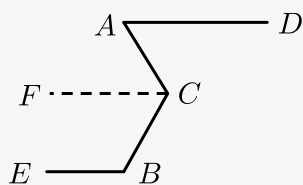


【答案】(1) 120° .

(2) $2\angle AQB + \angle C = 180^\circ$.

(3) $1 : 2 : 2$.

【解析】(1) 在图①中, 过点C作 $CF \parallel AD$, 则 $CF \parallel BE$.



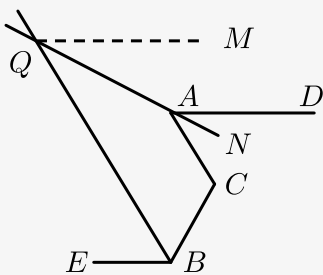
图①

$$\therefore CF \parallel AD \parallel BE,$$

$$\therefore \angle ACF = \angle A, \angle BCF = 180^\circ - \angle B,$$

$$\therefore \angle ACB = \angle ACF + \angle BCF = 180^\circ - (\angle B - \angle A) = 120^\circ.$$

(2) 在图②中, 过点Q作 $QM \parallel AD$, 则 $QM \parallel BE$.



图②

$$\therefore QM \parallel AD, QM \parallel BE,$$

$$\therefore \angle AQM = \angle NAD, \angle BQM = \angle EBQ.$$

$$\therefore AQ \text{ 平分 } \angle CAD, BQ \text{ 平分 } \angle CBE,$$

$$\therefore \angle NAD = \frac{1}{2} \angle CAD, \angle EBQ = \frac{1}{2} \angle CBE,$$

$$\therefore \angle AQB = \angle BQM - \angle AQM = \frac{1}{2} (\angle CBE - \angle CAD).$$

$$\therefore \angle C = 180^\circ - (\angle CBE - \angle CAD) = 180^\circ - 2\angle AQB,$$

$$\therefore 2\angle AQB + \angle C = 180^\circ.$$

(3) $\therefore AC \parallel QB,$

$$\therefore \angle AQB = \angle CAP = \frac{1}{2} \angle CAD, \angle ACP = \angle PBQ = \frac{1}{2} \angle CBE,$$

$$\therefore \angle ACB = 180^\circ - \angle ACP = 180^\circ - \frac{1}{2} \angle CBE.$$

$$\therefore 2\angle AQB + \angle ACB = 180^\circ,$$

$$\therefore \angle CAD = \frac{1}{2} \angle CBE.$$

$$\text{又} \therefore QP \perp PB,$$

$$\therefore \angle CAP + \angle ACP = 90^\circ, \text{ 即 } \angle CAD + \angle CBE = 180^\circ,$$

$$\therefore \angle CAD = 60^\circ, \angle CBE = 120^\circ,$$

$$\therefore \angle ACB = 180^\circ - (\angle CBE - \angle CAD) = 120^\circ,$$

$$\therefore \angle DAC : \angle ACB : \angle CBE = 60^\circ : 120^\circ : 120^\circ = 1 : 2 : 2.$$

二、实数

1. 无理数的概念

无理数概念：无限不循环小数叫做无理数．

常见的无理数：

- (1) 开方开不尽的数，如 $\sqrt{2}$ ， $-\sqrt{3}$ ， $\sqrt[3]{4}$ ， $\dots$ ；
- (2) 含有 π 的一类数， π 的倍数、几分之几 π 都是无理数，如 2π ， $\frac{1}{2}\pi$ ， $\frac{\sqrt{3}}{3}\pi$ ， $\dots$ ；
- (3) 以无限不循环小数的形式出现的特定结构的数，如 $0.12112111211112\dots$ ．

无理数的小数部分位数无限，无理数的小数部分不循环，不能表示成分数的形式．

2. 无理数的估算

(1) 求一个数的算术平方根与哪个整数最接近，就要看被开方数的值在哪两个相邻整数的平方之间，与被开方数的差值较小的那个整数即为与其最接近的数．

(2) 求一个数的立方根与哪个整数最接近，方法和求算术平方根相同，只要确定被开方数的值在哪两个相邻整数的立方之间，再确定和被开方数差值最小的那个整数即可．

3. 无理数小数部分的确定

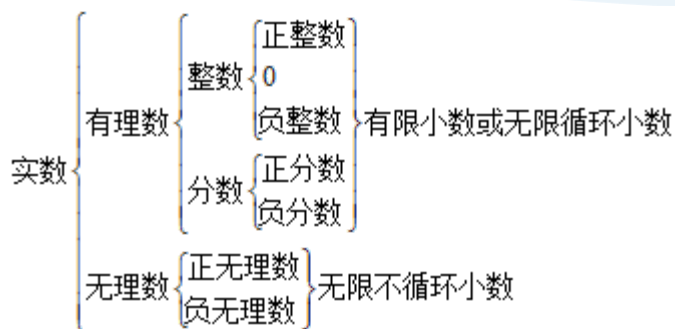
确定一个非完全平方数的算术平方根的小数部分，先确定这个无理数夹在哪两个相邻的自然数之间，则较小的自然数就是这个无理数的整数部分，再用这个无理数减去整数部分就得到它的小数部分．

4. 实数定义

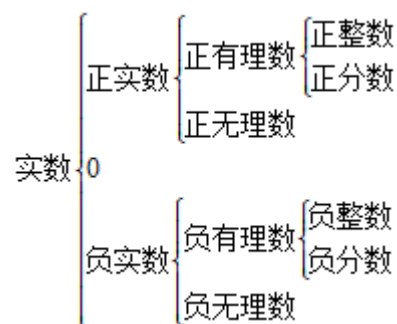
实数定义：有理数和无理数统称为实数．

5. 实数的分类

- (1) 按定义分类：



(2) 按性质分类：



💡 实数与数轴上的点——对应

即数轴上的每一个点都可以用一个实数来表示，反过来，每个实数都可以在数轴上找到表示它的点。

💡 实数的大小比较

①正实数大于0，负实数小于0，正实数大于一切负实数。

②两个负数比较大小，绝对值大的反而小；

③利用数轴比较实数大小：在数轴上表示两个实数，右边点对应的实数比左边点对应的实数大。

④比较两个数的平方的大小：

$a > 0, b > 0$ ，若 $(\sqrt{a})^2 > (\sqrt{b})^2$ ，则 $\sqrt{a} > \sqrt{b}$ ；

若 $(\sqrt{a})^2 < (\sqrt{b})^2$ ，则 $\sqrt{a} < \sqrt{b}$ ；若 $(\sqrt{a})^2 = (\sqrt{b})^2$ ，则 $\sqrt{a} = \sqrt{b}$ 。

⑤比较被开方数的大小：

$a > 0, b > 0$ ，若 $a > b$ ，则 $\sqrt{a} > \sqrt{b}$ ；若 $a < b$ ，则 $\sqrt{a} < \sqrt{b}$ ；若 $a = b$ ，则 $\sqrt{a} = \sqrt{b}$ 。

⑥作差法：

若 $a - b > 0$ ，则 $a > b$ ；若 $a - b = 0$ ，则 $a = b$ ；若 $a - b < 0$ ，则 $a < b$ 。

⑦作商法：

$a > 0, b > 0$ ，若 $\frac{a}{b} > 1$ ，则 $a > b$ ；若 $\frac{a}{b} = 1$ ，则 $a = b$ ；若 $\frac{a}{b} < 1$ ，则 $a < b$ 。

💡 实数的运算

实数和有理数一样，可进行加、减、乘、除、乘方、开方运算；

有理数范围内的运算律、运算法则在实数范围内仍使用。

加法的交换律： $a + b = b + a$ ；

加法的结合律： $(a + b) + c = a + (b + c)$ ；

乘法的交换律： $ab = ba$ ；

乘法的结合律： $(ab)c = a(bc)$ ；

乘法的分配律： $a(b + c) = ab + ac$ 。

实数的混合运算顺序：先乘方、开方，再乘除、最后算加减，同级运算按照从左到右的顺序进行，有括号的先算括号里面的。

【注意】

①有理数的各种运算法则在实数范围内仍然适用，在实数范围内，加、减、乘、除、乘方五种运算同有理数一样；

②在做开方运算时，要注意正实数和零既能开平方，也能开立方，负实数只能够开立方，不能开平方。

练习2

19. 下列各数 0.010010001 ， $\pi - 3.14$ ， 0 ， $\frac{\pi}{7}$ ， $\frac{\sqrt{3}}{3}$ ， $\sqrt[3]{27}$ ， $\sqrt{\frac{16}{9}}$ ，其中无理数的个数有（ ）。
- A. 1个 B. 2个 C. 3个 D. 4个

【答案】 C

【解析】 0.010010001 是有限小数是有理数。

$\pi - 3.14$ 是无理数。

0 是有理数。

$\frac{\pi}{7}$ 是无限不循环小数是无理数。

$\frac{\sqrt{3}}{3}$ 是无理数。

$\sqrt[3]{27} = 3$ ， $\sqrt{\frac{16}{9}} = \frac{4}{3}$ 是有理数。

其中无理数有3个。

【标注】 【知识点】 无理数的定义

20. $\sqrt{16}$ 的算术平方根是 _____。

【答案】 2

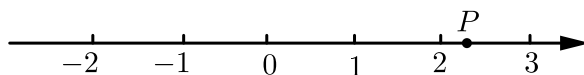
【解析】 $\because \sqrt{16} = 4$ ，

$\therefore 4$ 的算术平方根是2，

$\therefore \sqrt{16}$ 的算术平方根是2.

【标注】【知识点】算术平方根的定义

21. 如图，数轴上点P表示的数可能是（ ）.



A. $\sqrt{2}$

B. $\sqrt{5}$

C. $\sqrt{10}$

D. $\sqrt{15}$

【答案】B

【解析】由数轴可知点P在2—3之间，只有 $\sqrt{4} < \sqrt{5} < \sqrt{9}$ ，即 $2 < \sqrt{5} < 3$ ，故选B.

【标注】【知识点】无理数的估算

22. $\frac{9}{16}$ 的平方根是 $\pm\frac{3}{4}$ ，用式子表示正确的是（ ）.

A. $\pm\sqrt{\frac{9}{16}} = \frac{3}{4}$

B. $\pm\sqrt{\frac{9}{16}} = \pm\frac{3}{4}$

C. $\sqrt{\frac{9}{16}} = \frac{3}{4}$

D. $\sqrt{\frac{9}{16}} = \pm\frac{3}{4}$

【答案】B

【解析】依题意可列式为 $\pm\sqrt{\frac{9}{16}} = \pm\frac{3}{4}$.

【标注】【知识点】开平方

23. 关于“ $\sqrt{10}$ ”，下列说法不正确的是（ ）.

A. 它是数轴上唯一一个距离原点 $\sqrt{10}$ 个单位长度的点表示的数

B. 它是一个无理数

C. 若 $a < \sqrt{10} < a + 1$ ，则整数a的值为3

D. 它可以表示面积为10的正方形的边长

【答案】A

【解析】距离原点 $\sqrt{10}$ 个单位长度的点表示的数有 $\sqrt{10}$ 和 $-\sqrt{10}$ ，故A选项错误.

【标注】【知识点】实数与数轴

24. 估算 $5\sqrt{2} - 4\sqrt{3}$ 的值（ ）.

A. 在0与1之间

B. 在1与2之间

C. 在2与3之间

D. 在3与4之间

【答案】 A

【解析】 $5\sqrt{2} = \sqrt{50}$,

$$4\sqrt{3} = \sqrt{48},$$

$$0 < \sqrt{50} - \sqrt{48} < 1.$$

【标注】【知识点】无理数的估算

25. 9的平方根是 x ，64的立方根是 y ，则 $x + y$ 的值为（ ）.

A. 3

B. 7

C. 1或7

D. 3或7

【答案】 C

【解析】 $x = \pm 3$, $y = 4$, $x + y = 1$ 或7.

【标注】【知识点】开平方

26. 若 $a - 3$ 有平方根，则实数 a 的取值范围是 _____ .

【答案】 $a \geq 3$

【解析】 $\because a - 3$ 有平方根，

$$\therefore a - 3 \geq 0,$$

$$\therefore a \geq 3.$$

【标注】【知识点】由平方根求参数的值

27. 已知 $\sqrt[3]{68.8} = 4.098$ ， $\sqrt[3]{6.88} = 1.902$ ，则 $\sqrt[3]{6880} =$ _____ .

【答案】 19.02

【解析】 $\because \sqrt[3]{6.88} = 1.902$,

$$\therefore \sqrt[3]{6880} = 19.02.$$

【标注】【知识点】立方根中小数点移动规律的应用

28. 已知 $\sqrt{5}-1$ 的小数部分是 x ， $6-\sqrt{5}$ 的小数部分是 y ，则 $4x+4y=$ _____.

【答案】 4

【解析】 $x = \sqrt{5} - 1 - 1 = \sqrt{5} - 2$,

$$y = 6 - \sqrt{5} - 3 = 3 - \sqrt{5},$$

$$\therefore 4x + 4y = 4(x + y) = 4(\sqrt{5} - 2 + 3 - \sqrt{5}) = 4.$$

【标注】 【知识点】 根式的整数、小数部分

29. 已知实数 a 满足 $|2017 - a| + \sqrt{a - 2018} = a$ ，则 $a - 2017^2 =$ _____.

【答案】 2018

【解析】 原式 $= a - 2017 + \sqrt{a - 2018} = a$,

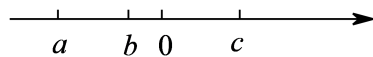
$$\sqrt{a - 2018} = 2017,$$

$$a - 2018 = 2017^2,$$

$$a - 2017^2 = 2018.$$

【标注】 【知识点】 二次根式的性质

30. 实数 a 、 b 、 c 在数轴上的对应点位置如图所示，化简： $\sqrt{(-c)^2} + |a - b| + \sqrt[3]{(a+b)^3} + |b - c| =$ _____.



【答案】 $2c + b$

【解析】 原式 $= |c| + b - a + (a + b) + c - b$

$$= c + b - a + a + b + c - b$$

$$= 2c + b.$$

【标注】 【知识点】 结合数轴化简绝对值

31. 解决下列问题：

(1) 计算： $\sqrt{0.25} - \sqrt[3]{\frac{7}{8}} - 1 - \sqrt{(-2)^2} - |1 - \sqrt{2}|$.

(2) 解方程： $64(x + 1)^2 - 25 = 0$.

【答案】(1) $-\sqrt{2}$.

$$(2) x = -\frac{3}{8} \text{ 或 } x = -1\frac{5}{8}.$$

【解析】(1) 原式 $= 0.5 + \frac{1}{2} - 2 - (\sqrt{2} - 1)$
 $= 1 - 2 - \sqrt{2} + 1$
 $= -\sqrt{2}.$

$$(2) 64(x+1)^2 = 25,$$
$$(x+1)^2 = \frac{25}{64},$$
$$x+1 = \frac{5}{8} \text{ 或 } x+1 = -\frac{5}{8},$$
$$x = -\frac{3}{8} \text{ 或 } x = -1\frac{5}{8}.$$

【标注】【知识点】实数基础运算

32. 如果 $a+3$ 和 $2a-6$ 是一个数的平方根，这个数为 _____.

【答案】16或144

【解析】根据题意得： $a+3+2a-6=0$ ，或 $a+3=2a-6$ ，
移项、合并同类项得： $3a=3$ 或 $-a=-9$ ，
解得： $a=1$ 或 $a=9$ ，
则这个数为 $(1+3)^2=16$ 或 $(9+3)^2=144$ ，
故答案为：16或144.

【标注】【知识点】由平方根求参数的值

33. 已知一个正数的两个平方根分别是 $2m-1$ 和 $4-3m$ ，求 $5m-7$ 的立方根.

【答案】2.

【解析】根据平方根的定义， $2m-1+4-3m=0$ ，
解得： $m=3$ ，
 $\therefore 5m-7=5\times 3-7=8$ ，
由立方根的定义得出，8的立方根为2.

【标注】【知识点】平方根和立方根综合

三、平面直角坐标系

1. 有序实数对

有序实数对：有顺序的两个数 a 与 b 组成的实数对，叫做有序实数对，记作 (a, b) 。利用有序数对，可以准确地表示一个位置。

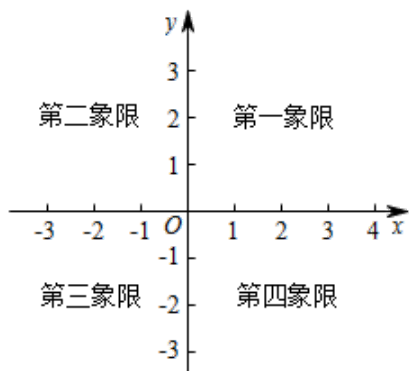
2. 平面直角坐标系

(1) 在平面内有两条互相垂直、原点重合的数轴，组成平面直角坐标系。

- ① **x轴**：水平的数轴叫做**x轴**或横轴，习惯上取向右的方向为正方向；
- ② **y轴**：竖直的数轴叫做**y轴**或纵轴，习惯上取向上的方向为正方向；
- ③ **坐标原点**：两坐标轴的交点叫做平面直角坐标的原点；
- ④ **坐标轴**：**x轴**和**y轴**统称为坐标轴；
- ⑤ **坐标平面**：平面直角坐标系所在的平面叫做坐标平面。

(2) 象限：**x轴**和**y轴**把坐标平面分成四个部分，称为四个象限。

按逆时针顺序依次叫做第一象限，第二象限，第三象限，第四象限。



【注意】

- ① 两条坐标轴上的点不属于任何一个象限。原点既在**x轴**上，又在**y轴**上。
- ② 如果所表示的平面直角坐标系具有实际意义时，要在表示横轴，纵轴的字母后附上单位。

3. 点的坐标

📍 已知坐标平面内的点，确定点的坐标

对于坐标平面内的一点 A ，过点 A 分别向**x轴**、**y轴**作垂线，垂足在**x轴**、**y轴**上对应的数 a 、 b 分别叫做点 A 的横坐标和纵坐标，有序实数对 (a, b) 叫做点 A 的坐标，记作 $A(a, b)$ 。

【注意】

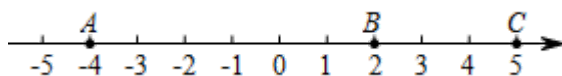
- (1) 横坐标写在纵坐标前面，中间用“，”号隔开，再用小括号括起来。
- (2) 坐标平面内的点与有序实数对是一一对应关系。
- (3) 坐标平面内任意一点 M ，都有唯一的一对有序数对 (x, y) （即点 M 的坐标）和它对应；反过来，对于任意一对有序数对 (x, y) ，在坐标平面内都有唯一的一点 M （即坐标为 (x, y) 的点）和它对应。

已知点的坐标确定点的位置

若点 P 的坐标是 (a, b) ，先在 x 轴上找到坐标为 a 的点 A ，在 y 轴上找到坐标为 b 的点 B ；再分别过点 A 、点 B 作 x 轴、 y 轴的垂线，两垂线的交点就是所要确定的点 P 。

4. 点与有序实数对

- (1) 数轴上的点与实数：数轴上的点与实数是一一对应的。
- ①数轴上每个点都对应一个实数，这个实数叫做这个点在数轴上的坐标。
- 如点 A 在数轴上的坐标是 -4 ，点 B 在数轴上的坐标为 2 。
- ②数轴上一个点的坐标确定了，这个点在数轴上的位置也就确定了。
- 如数轴上坐标为 5 的点是 C 。

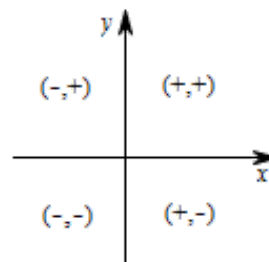


- (2) 坐标平面内的点与有序实数对：坐标平面内的点与有序实数对是一一对应的。
- ①坐标平面内任意一点 M ，都有唯一的一对有序数对 (x, y) （即点 M 的坐标）和它对应。
- ②对于任意一对有序数对 (x, y) ，在坐标平面内都有唯一的一点 M （即坐标为 (x, y) 的点）和它对应。

5. 各象限内点的坐标特征

- 点 $P(x, y)$ 在第一象限 $\Leftrightarrow (+, +), x > 0, y > 0$ ；
- 点 $P(x, y)$ 在第二象限 $\Leftrightarrow (-, +), x < 0, y > 0$ ；
- 点 $P(x, y)$ 在第三象限 $\Leftrightarrow (-, -), x < 0, y < 0$ ；
- 点 $P(x, y)$ 在第四象限 $\Leftrightarrow (+, -), x > 0, y < 0$ 。

点的坐标	横坐标	纵坐标
第一象限	+	+
第二象限	-	+
第三象限	-	-
第四象限	+	-



6. 坐标轴上点的坐标特征

(1) 点 $P(x, y)$ 落在 x 轴上

点 $P(x, y)$ 在 x 轴上 $\Leftrightarrow y = 0$, x 为任意实数;

点 $P(x, y)$ 在 x 正半轴上 $\Leftrightarrow (+, 0)$, 在 x 负半轴上 $\Leftrightarrow (-, 0)$.

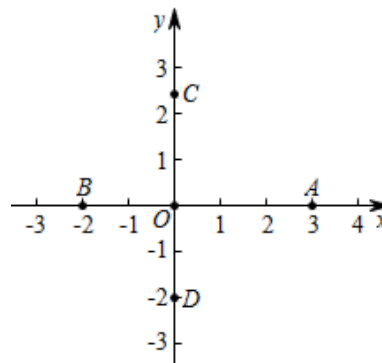
(2) 点 $P(x, y)$ 落在 y 轴上

点 $P(x, y)$ 在 y 轴上 $\Leftrightarrow x = 0$, y 为任意实数;

点 $P(x, y)$ 在 y 正半轴上 $\Leftrightarrow (0, +)$, 在 y 负半轴上 $\Leftrightarrow (0, -)$.

点 $P(x, y)$ 即在 x 轴上, 又在 y 轴上 $\Leftrightarrow x = 0, y = 0$, 即点 P 的坐标为 $(0, 0)$, 是坐标原点.

	点的位置	横坐标	纵坐标
x 轴	正半轴	+	0
	负半轴	-	0
y 轴	正半轴	0	+
	负半轴	0	-
	原点	0	0



7. 平行于坐标轴的直线上的点的坐标特征

(1) 平行于 x 轴直线上的两点, 其纵坐标相等, 横坐标为两个不相等的实数;

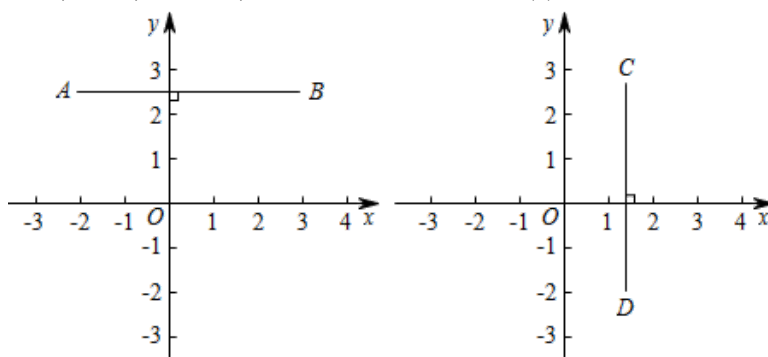
若 $AB \parallel x$ 轴, 则 $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ 的纵坐标相等, 即 $y_1 = y_2$;

反之, 若 $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, 且 $y_1 = y_2$, 则 $AB \parallel x$ 轴.

(2) 平行于 y 轴直线上的两点, 其横坐标相等, 纵坐标为两个不相等的实数.

若 $CD \parallel y$ 轴, 则 $C(m_1, n_1)$, $D(m_2, n_2)$ 的横坐标相等, 即 $m_1 = m_2$;

反之，若 $C(m_1, n_1)$ ， $D(m_2, n_2)$ ，且 $m_1 = m_2$ ，则 $CD \parallel y$ 轴。



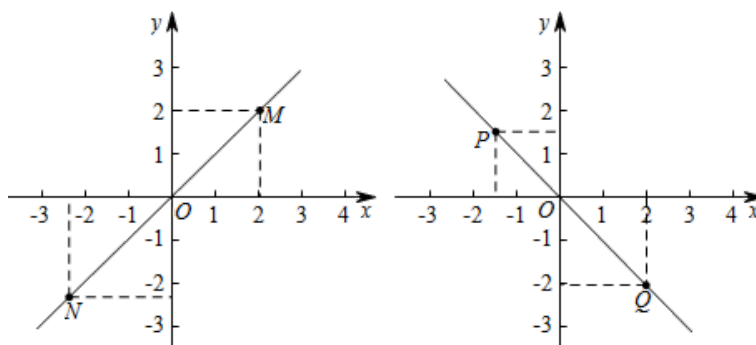
8. 象限角的平分线上点的坐标特征

(1) 点 $P(x, y)$ 在第一、三象限的角平分线上，横、纵坐标相等，即 $x = y$ ；

反之，若 $x = y$ ，则 $P(x, y)$ 在第一、三象限的角平分线上。

(2) 点 $P(x, y)$ 在第二、四象限的角平分线上，横、纵坐标互为相反数，即 $x + y = 0$ ；

反之，若 $x + y = 0$ ，则 $P(x, y)$ 在第二、四象限的角平分线上。



9. 点到坐标轴的距离

(1) 平面直角坐标系中的点 $P(a, b)$ ，

①到 x 轴的距离为 $|b|$ ；

②到 y 轴的距离为 $|a|$ 。

(2) 平面直角坐标系中点 P 到 x 轴距离为 $|b|$ ，到 y 轴距离为 $|a|$ 则点 P 坐标有四种情况，分别是 $P_1(a, b)$ ， $P_2(-a, b)$ ， $P_3(a, -b)$ ， $P_4(-a, -b)$ 。

10. 点到平行于坐标轴直线的距离

(1) 平面直角坐标系中的点 $P(a, b)$ 到直线 $x = n$ 的距离是 $|a - n|$ ；

(2) 平面直角坐标系中的点 $P(a, b)$ 到直线 $y = m$ 的距离是 $|b - m|$ 。

11. 平行于坐标轴的直线上两点的距离

平面直角坐标系中的点 $P_1(a_1, b_1)$, $P_2(a_2, b_2)$,

(1) 当 P_1P_2 平行于 x 轴时, $|P_1P_2| = |a_1 - a_2|$;

(2) 当 P_1P_2 平行于 y 轴时, $|P_1P_2| = |b_1 - b_2|$.

用坐标表示对称

(1) 点 $P(x, y)$ 关于 x 轴的对称点是 $P'(x, -y)$, 即横坐标不变, 纵坐标互为相反数.

(2) 点 $P(x, y)$ 关于 y 轴的对称点是 $P'(-x, y)$, 即纵坐标不变, 横坐标互为相反数.

(3) 点 $P(x, y)$ 关于坐标原点的对称点是 $P'(-x, -y)$, 即横坐标互为相反数, 纵坐标也互为相反数.

(4) 点 $P(x, y)$ 关于点 $Q(m, n)$ 的对称点是 $M(2m - x, 2n - y)$.

【注意】关于谁对称谁不变, 另一个变相反; 关于原点对称都改变.

12. 点的平移

(1) 将点 $P(x, y)$ 向右平移 a 个单位可得对应点 $P'(x + a, y)$;

(2) 将点 $P(x, y)$ 向左平移 a 个单位可得对应点 $P'(x - a, y)$.

【注意】左右平移纵坐标不变, 横坐标“左减右加”.

(3) 将点 $P(x, y)$ 向上平移 b 个单位, 可得对应点 $P'(x, y + b)$;

(4) 将点 $P(x, y)$ 向下平移 b 个单位, 可得对应点 $P'(x, y - b)$.

【注意】上下平移横坐标不变, 纵坐标“上加下减”.

练习3

34. 在平面直角坐标系中, 点 $M(1, -4)$ 在().

A. 第一象限

B. 第二象限

C. 第三象限

D. 第四象限

【答案】 D

【解析】 $M(1, -4)$, 横坐标大于0, 纵坐标小于0,
∴在第四象限.

【标注】【知识点】象限内坐标的特征

35. 在坐标平面内, 若点 $P(x - 2, x + 1)$ 在第二象限, 则 x 的取值范围是().

A. $x > 2$

B. $x < 2$

C. $x > -1$

D. $-1 < x < 2$

【答案】 D

【解析】 $\because$ 点 $P(x-2, x+1)$ 在第二象限.

$$\therefore \begin{cases} x-2 < 0 \\ x+1 > 0 \end{cases}, \text{得} -1 < x < 2.$$

【标注】【知识点】解一元一次不等式组

36. 若点 $A(a, b)$ 在第二象限, 则点 $B(-a, 2b)$ 在().

- A. 第一象限 B. 第二象限 C. 第三象限 D. 第四象限

【答案】A

【解析】 $A(a, b)$ 在第二象限, $a < 0, b > 0$,

$\therefore B(-a, 2b)$ 在第一象限.

【标注】【知识点】象限内坐标的特征

37. 若点 $P(2-a, 3a+6)$ 到两坐标轴的距离相等, 则点 P 的坐标是().

- A. (3, 3) B. (3, -3)或(6, -6) C. (6, -6) D. (3, 3)或(6, -6)

【答案】D

【解析】 $|2-a| = |3a+6|$,

$$\therefore 2-a = 3a+6 \text{ 或 } 2-a = -(3a+6),$$

$$a = -1 \text{ 或 } a = -4.$$

【标注】【知识点】坐标与距离

38. 过点 $A(-2, 3)$ 且垂直于 y 轴的直线交 y 轴于点 B , 则点 B 的坐标为().

- A. (0, -2) B. (3, 0) C. (0, 3) D. (-2, 0)

【答案】C

【解析】 $\because AB \perp y$ 轴,

$\therefore$ 点 B 纵坐标为3,

$\therefore$ 点 B 在 y 轴上,

$$\therefore B(0, 3).$$

【标注】【知识点】平行于坐标轴的直线上点的坐标特征

39. 平面直角坐标系中，已知线段 AB 的两个端点分别是 $A(4, -1)$ ， $B(1, 1)$ ，将线段 AB 平移后得到线段 $A'B'$ ，若点 A' 的坐标为 $(-2, 2)$ ，则点 B' 的坐标为（ ）。

- A. $(-5, 4)$ B. $(4, 3)$ C. $(-1, -2)$ D. $(-2, -1)$

【答案】 A

【解析】 $\because$ 点 $A(4, -1)$ 向左平移6个单位长度，再向上平移3个单位长度得到 $A'(-2, 2)$ ，
 $\therefore$ 点 $B(1, 1)$ 向左平移6个单位长度，再向上平移3个单位长度得到的对应点 B' 的坐标为 $(-5, 4)$ 。
故选A。

【标注】【知识点】坐标系中的平移-图形的平移

40. 将点 $A(2, 3)$ 向左平移2个单位长度得到点 A' ，点 A' 关于 x 轴的对称点是 A'' ，则点 A'' 的坐标为（ ）。

- A. $(4, 3)$ B. $(4, -3)$ C. $(0, -3)$ D. $(0, 3)$

【答案】 C

【解析】 $A'(0, 3)$ ， $A''(0, -3)$ 。

【标注】【知识点】轴对称的定义

【知识点】坐标系中的对称-点关于坐标轴对称

【知识点】坐标系中的平移-点的平移

41. 在平面直角坐标系中，点 $A(-3, 2)$ ， $B(3, 5)$ ， $C(x, y)$ ，若 $AC \parallel x$ 轴，则线段 BC 的最小值及此时点 C 的坐标分别为（ ）。

- A. 6， $(-3, 5)$ B. 10， $(3, -5)$ C. 1， $(3, 4)$ D. 3， $(3, 2)$

【答案】 D

【解析】 $\because AC \parallel x$ 轴， $A(-3, 2)$ ，
 $\therefore C(x, 2)$ 。
 $\because B(3, 5)$ ， $C(x, 2)$ ， BC 有最小值，
 $\therefore C(3, 2)$ ，
 $\therefore BC_{\min} = 3$ 。

【标注】【知识点】坐标与距离

42. 点 $P(3-a, a-1)$ 在 y 轴上, 则 $a =$ _____.

【答案】3

【解析】 $\because$ 点 $P(3-a, a-1)$ 在 y 轴上, y 轴上的横坐标为0,
 $\therefore 3-a=0$ 即 $a=3$.

【标注】【知识点】象限内坐标的特征

43. 在平面直角坐标系中, 点 A 位于第二象限, 距离 x 轴1个单位长度距离 y 轴3个单位长度, 则 A 点的坐标是_____.

【答案】 $(-3, 1)$

【解析】 $\because$ 点 A 位于第二象限,
 $\therefore$ 点的横坐标为负数, 纵坐标为正数,
 $\therefore$ 点距离 x 轴1个单位长度, 距离 y 轴3个单位长度,
 $\therefore$ 点 A 的坐标为 $(-3, 1)$.

【标注】【知识点】坐标与距离

44. 已知点 $A(2, 0)$, $B(0, 4)$, 点 P 在 x 轴上, $\triangle PAB$ 的面积为6, 则点 P 的坐标是_____.

【答案】 $(-1, 0)$, $(5, 0)$

【解析】 $\frac{1}{2}|x_P - 2| \cdot 4 = 6$,
 $2|x_P - 2| = 6$,
 $|x_P - 2| = 3$,
 $\therefore x_P - 2 = 3$ 或 $x_P - 2 = -3$,
 $x_P = 5$ 或 $x_P = -1$,
 $\therefore P(-1, 0)$, $(5, 0)$.

【标注】【知识点】坐标与距离

45. 在平面直角坐标系中, 有点 $A(1, 2a+1)$, $B(-a, a-3)$.

(1) 当点 A 在第一象限的角平分线上时, a 的值为 _____ .

(2) 若线段 $AB \parallel x$ 轴.

① 求点 A 、 B 的坐标.

② 将线段 AB 平移至线段 $A'B'$, 点 A 、 B 分别平移至 $A'(x_1, 3x_1 + 1)$, $B'(x_2, 2x_2 - 3)$, 则 A' 坐标为 _____, B' 坐标为 _____ .

【答案】 (1) 0

(2) ① $A(1, -7)$, $B(4, -7)$.

② $(2, 7)$; $(5, 7)$

【解析】 (1) 0.

(2) ① $A(1, -7)$, $B(4, -7)$.

$\because A(1, 2a + 1)$, $B(-a, a - 3)$,

又 $\because AB \parallel x$ 轴,

$\therefore 2a + 1 = a - 3$, $\therefore a = -4$,

$\therefore A(1, -7)$, $B(4, -7)$.

② $\because A(1, -7)$, $B(4, -7)$,

将 AB 平移至 $A'B'$,

即 $A'(x_1, 3x_1 + 1)$, $B'(x_2, 2x_2 - 3)$,

$\therefore x_2 = x_1 + 3$, $\therefore B'(x_1 + 3, 2x_1 + 3)$,

$\because AB \parallel x$ 轴, $\therefore B'(x_1 + 3, 2x_1 + 3)$,

$\therefore 3x_1 + 1 = 2x_1 + 3$,

$x_1 = 2$,

$\therefore A'(2, 7)$, $B'(5, 7)$.

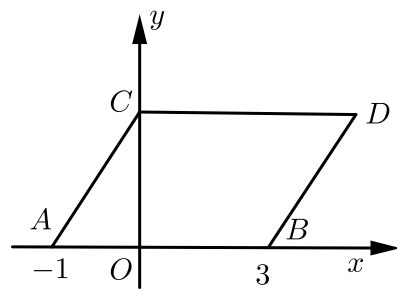
【标注】【能力】推理论证能力

【知识点】坐标系中的平移-点的平移

【知识点】角平分线上点的坐标特征

【知识点】平行于坐标轴的直线上点的坐标特征

46. 如图, 在平面直角坐标系中, 点 A , B 的坐标分别为 $(-1, 0)$, $(3, 0)$, 现同时将点 A , B 分别向上平移2个单位, 再向右平移1个单位, 分别得到点 A , B 的对应点 C , D , 连接 AC , BD , CD .



- (1) 求点 C, D 的坐标 .
- (2) 若在 y 轴上存在点 M , 连接 MA, MB , 使 $S_{\triangle MAB} = S_{\text{平行四边形}ABCD}$, 求出点 M 的坐标 .
- (3) 若点 P 在直线 BD 上运动, 连接 PC, PO .
- ① 若 P 在线段 BD 之间时 (不与 B, D 重合), 求 $S_{\triangle CDP} + S_{\triangle BOP}$ 的取值范围 .
- ② 若 P 在直线 BD 上运动, 请直接写出 $\angle CPO, \angle DCP, \angle BOP$ 的数量关系 .

【答案】 (1) $C(0, 2), D(4, 2)$.

(2) M 点的坐标为 $(0, 4)$ 或 $(0, -4)$.

(3) ① $3 < S_{\triangle CDP} + S_{\triangle BOP} < 4$.

② $\angle DCP + \angle BOP = \angle CPO$ 或 $\angle BOP - \angle DCP = \angle CPO$.

【解析】 (1) 由平移可知: $C(0, 2), D(4, 2)$.

(2) $\because AB = 4, CO = 2$,

$$\therefore S_{\text{平行四边形}ABOC} = AB \cdot CO = 4 \times 2 = 8,$$

设 M 坐标为 $(0, m)$,

$$\therefore \frac{1}{2} \times 4 \times |m| = 8, \text{ 解得 } m = \pm 4,$$

$\therefore M$ 点的坐标为 $(0, 4)$ 或 $(0, -4)$.

(3) ① $S_{\text{梯形}OCDB} = \frac{1}{2} \times (3 + 4) \times 2 = 7$,

当点 P 运动到点 B 时, $S_{\triangle POC}$ 最小, $S_{\triangle POC}$ 的最小值 $= \frac{1}{2} \times 3 \times 2 = 3$,

$$S_{\triangle CDP} + S_{\triangle BOP} > 3,$$

当点 P 运动到点 D 时, $S_{\triangle POC}$ 最大, $S_{\triangle POC}$ 的最大值 $= \frac{1}{2} \times 4 \times 2 = 4$,

$$S_{\triangle CDP} + S_{\triangle BOP} < 4,$$

所以 $3 < S_{\triangle CDP} + S_{\triangle BOP} < 4$.

② 当点 P 在 BD 上, 如图1, 作 $PE \parallel CD$,

$$\because CD \parallel AB,$$

$$\therefore CD \parallel PE \parallel AB,$$

$$\therefore \angle DCP = \angle EPC, \angle BOP = \angle EPO,$$

$$\therefore \angle DCP + \angle BOP = \angle EPC + \angle EPO = \angle CPO.$$

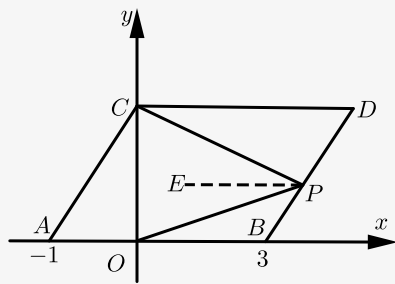


图1

当点 P 在线段 BD 的延长线上时，如图2，作 $PE \parallel CD$ ，

$$\because CD \parallel AB,$$

$$\therefore CD \parallel PE \parallel AB,$$

$$\therefore \angle DCP = \angle EPC, \angle BOP = \angle EPO,$$

$$\therefore \angle EPO - \angle EPC = \angle BOP - \angle DCP,$$

$$\therefore \angle BOP - \angle DCP = \angle CPO.$$

同理可得当点 P 在线段 DB 的延长线上时， $\angle BOP - \angle DCP = \angle CPO$ 。

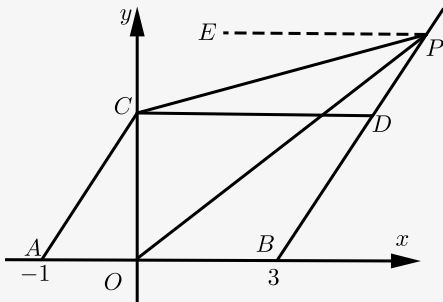
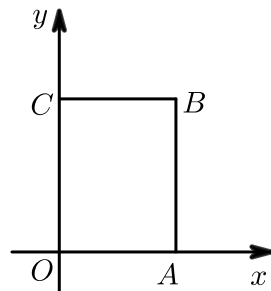


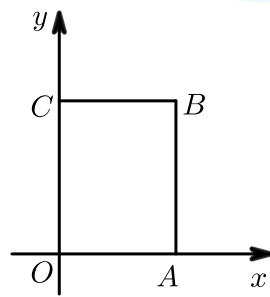
图2

【标注】【知识点】平行四边形性质综合应用

47. 如图，在长方形 $OABC$ 中， O 为平面直角坐标系的原点，点 A 的坐标为 $(a, 0)$ ，点 C 的坐标为 $(0, b)$ 且 a 、 b 满足 $\sqrt{a-4} + |b-6| = 0$ ，点 B 在第一象限内，点 P 从原点出发，以每秒2个单位长度的速度沿着 $O-C-B-A-O$ 的线路移动。



- (1) 点 B 的坐标为 _____。当点 P 移动3.5秒时，点 P 的坐标为 _____。
- (2) 在移动过程中，当点 P 到 x 轴的距离为4个单位长度时，求点 P 移动的时间。
- (3) 在移动过程中，当 $\triangle OBP$ 的面积是10时，求点 P 移动的时间。



备用图

【答案】(1) $(4, 6)$; $(1, 6)$

(2) P 移动时间为2秒或6秒.

(3) 点 P 移动时间为 $\frac{5}{2}$ 秒, $\frac{10}{3}$ 秒, $\frac{15}{2}$ 秒或 $\frac{25}{3}$ 秒.

【解析】(1) $\because \sqrt{a-4} + |b-6| = 0$,

又 $\because \sqrt{a-4} \geq 0, |b-6| \geq 0$,

$\therefore a-4=0$,

$a=4$,

$\therefore b-6=0$,

$b=6$,

$\therefore A(4, 0), C(0, 6)$,

$\therefore B$ 的坐标为 $(4, 6)$,

当 P 移动3.5秒时, 点 P 运动的路程为 $2 \times 3.5 = 7$,

依题意有: $OC = 6, CB = 4$,

$\therefore$ 此时 P 在 BC 上运动, 且 $CP = 7 - 6 = 1$,

$\therefore$ 此时点 P 的坐标为 $(1, 6)$.

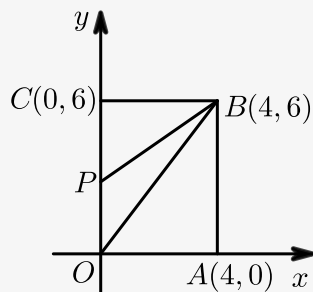
(2) 在移动过程中, 点 P 到 x 轴的距离为4个单位长度时存在两种情况.

①若点 P 在边 OC 上时, 运动时间为 $4 \div 2 = 2(\text{s})$,

②若点 P 在边 BC 上时, 运动时间为 $[6 + 4 + (6 - 4)] \div 2 = 6(\text{s})$,

$\therefore P$ 移动时间为2秒或6秒.

(3) ①



图①

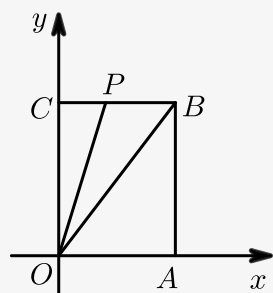
如图①所示 $S_{\triangle OBP} = \frac{1}{2}OP \cdot BC$,

$$10 = \frac{1}{2}OP \cdot 4 ,$$

$$OP = 5 ,$$

$$\therefore t = \frac{OP}{2} = \frac{5}{2}(\text{s}) .$$

②



图②

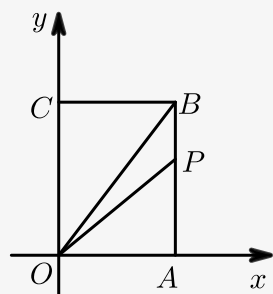
如图②所示 $S_{\triangle OBP} = \frac{1}{2}BP \cdot OC$,

$$10 = \frac{1}{2}BP \cdot 6 ,$$

$$BP = \frac{10}{3} ,$$

$$\therefore t = \frac{OC + CP}{2} = \frac{6 + \left(4 - \frac{10}{3}\right)}{2} = \frac{\frac{20}{3}}{2} = \frac{10}{3}(\text{s}) .$$

③



图③

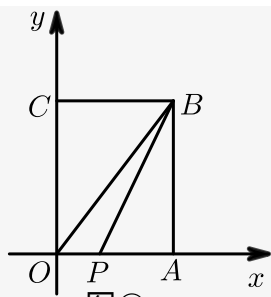
如图③所示 $S_{\triangle OBP} = \frac{1}{2}BP \cdot OA$,

$$10 = \frac{1}{2} \times 4 \cdot BP ,$$

$$BP = 5 ,$$

$$t = \frac{OC + BC + BP}{2} = \frac{6 + 4 + 5}{2} = \frac{15}{2}(\text{s}) .$$

④



图④

如图④所示 $S_{\triangle OBP} = \frac{1}{2}OP \cdot AB$,

$$10 = \frac{1}{2}OP \times 6,$$

$$OP = \frac{10}{3},$$

$$t = \frac{OC + BC + AB + AP}{2} = \frac{6 + 4 + 6 + (4 - \frac{10}{3})}{2} = \frac{25}{3}(\text{s}),$$

综上所述, 点P移动时间为 $\frac{5}{2}$ 秒, $\frac{10}{3}$ 秒, $\frac{15}{2}$ 秒或 $\frac{25}{3}$ 秒.

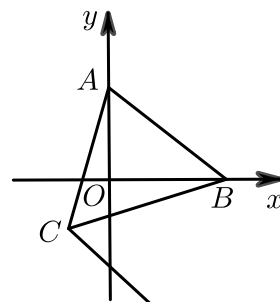
【标注】【知识点】坐标系中的动点问题（非函数）

48. 在平面直角坐标系中, 点A、B在坐标轴上, 其中A(0, a)、B(b, 0)满足

$$|2a - b - 1| + \sqrt{a + 2b - 8} = 0.$$

(1) 求A、B两点的坐标.

(2) 将线段AB平移到CD, 点A的对应点为C(-2, t), 如图(1)所示, 若三角形ABC的面积为9, 求点D的坐标.



图(1) D

(3) 平移线段AB到CD, 若点C、D也在坐标轴上, 如图(2)所示. P为线段AB上的一动点 (不与A、B重合), 连接OP, PE平分 $\angle OPB$, $\angle BCE = 2\angle ECD$.

求证: $\angle BCD = 3(\angle CEP - \angle OPE)$.

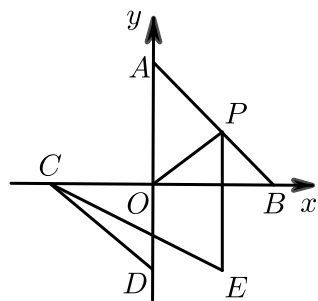


图 (2)

【答案】 (1) $A(0, 2)$, $B(3, 0)$.

(2) $D(1, -\frac{14}{3})$.

(3) 证明见解析 .

【解析】 (1) $\because |2a - b - 1| + \sqrt{a + 2b - 8} = 0$,

$$\therefore \begin{cases} 2a - b - 1 = 0 \\ a + 2b - 8 = 0 \end{cases}$$

$$\text{解得} \begin{cases} a = 2 \\ b = 3 \end{cases}$$

$$\therefore A(0, 2) , B(3, 0) .$$

(2) 如图 (1) , 过点 A 、 C 作 x 轴的平行线 , 过点 B 、 C 作 y 轴的平行线 , 分别交于 M , N , Q 点 ,

$\therefore$

$$\begin{aligned} S_{\triangle ABC} &= [3 - (-2)] \times (2 - t) - \frac{1}{2} \times (2 - t) \times 2 - \frac{1}{2} \times 3 \times 2 - \frac{1}{2} \times [3 - (-2)] \times (-t) \\ &= 5 \times (2 - t) - (2 - t) - 3 + \frac{5}{2}t \\ &= 10 - 5t - 2 + t - 3 + \frac{5}{2}t \\ &= 5 - \frac{3}{2}t , \end{aligned}$$

$$\text{且 } S_{\triangle ABC} = 9 ,$$

$$\therefore 5 - \frac{3}{2}t = 9 ,$$

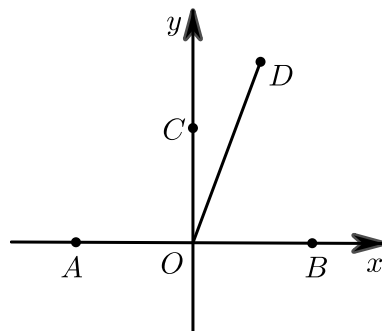
$$-\frac{3}{2}t = 4 ,$$

$$t = -\frac{8}{3} ,$$

$$\therefore 2 - \left(-\frac{8}{3}\right) = \frac{14}{3} ,$$

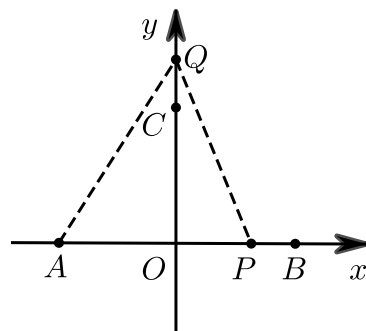
$$\therefore B(3, 0) ,$$

$$\therefore D(1, -\frac{14}{3}) .$$



图①

- (1) 若点 C 为 AD 与 y 轴的交点, 求 C 点的坐标.
- (2) 动点 P 从 B 点出发以每秒 1 个单位的速度沿 BA 方向运动, 同时动点 Q 从 C 点出发, 也以每秒 1 个单位的速度沿 y 轴正半轴方向运动. (当 P 点运动到 A 点时, 两点都停止运动, 如图②所示). 设从出发起运动了 t 秒.



图②

- ① 请用含 t 的代数式分别表示 P 、 Q 两点的坐标.
- ② 当 $t = 2$ 时, y 轴上是否存在一点 E , 使得 $\triangle AQE$ 的面积与 $\triangle APQ$ 的面积相等? 若存在, 求 E 点的坐标, 若不存在, 说明理由.

【答案】 (1) $C(0, 5)$.

(2) ① $P(5 - t, 0)$, $Q(0, 5 + t)$.

② $E_1\left(0, -\frac{21}{5}\right)$, $E_2\left(0, \frac{91}{5}\right)$.

【解析】 (1) $S_{\triangle AOD} = \frac{1}{2} \cdot AO \cdot 7 = \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 7 = \frac{35}{2}$,

$$S_{\triangle AOD} = S_{\triangle AOC} + S_{\triangle COD},$$

$$\frac{35}{2} = \frac{1}{2} \cdot OC \cdot AO + \frac{1}{2} \cdot OC \cdot 2,$$

$$\frac{35}{2} = (5OC + 2OC) \frac{1}{2},$$

$$OC = 5,$$

$$\therefore C(0, 5).$$

(2) ① $\because BP = 1 \cdot t = 5$,

$$\therefore P(5-t, 0),$$

$$\therefore CQ = 1 \cdot t = t,$$

$$\therefore Q(0, 5+t).$$

② 当 $t = 2$ 时,

$$P(3, 0), Q(0, 7),$$

$$\text{设 } E(0, y_E),$$

$$S_{\triangle APQ} = \frac{1}{2} \cdot AP \cdot OQ = \frac{1}{2} \cdot (3+5) \cdot 7 = 28,$$

假设存在,

$$S_{\triangle AQE} = S_{\triangle APQ},$$

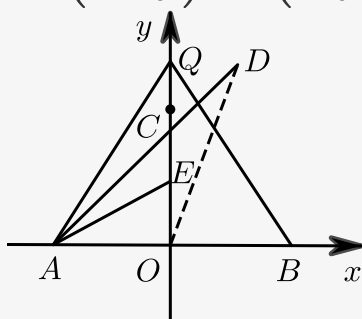
$$\frac{1}{2} \cdot QE \cdot AD = 28,$$

$$\therefore \frac{1}{2} (7 - y_E) \cdot 5 = 28,$$

$$7 - y_E = \frac{56}{5} \text{ 或 } 7 - y_E = -\frac{56}{5},$$

$$y_E = -\frac{21}{5} \text{ 或 } y_E = \frac{91}{5},$$

$$\therefore E_1\left(0, -\frac{21}{5}\right), E_2\left(0, \frac{91}{5}\right).$$



【标注】【知识点】一次函数与动点问题

四、二元一次方程（组）

1. 二元一次方程的概念

含有两个未知数，并且含有未知数的项的次数都是1，像这样的方程叫做二元一次方程。例如 $y = x$ ， $x + y = 1$ 等都是二元一次方程。

二元一次方程的一般形式

二元一次方程的一般形式为： $ax + by + c = 0$ ($a \neq 0, b \neq 0$)。



判定一个方程是二元一次方程必须同时满足三个条件

- ①方程两边的代数式都是整式——整式方程（即分母中不含未知数）；
- ②有且只有两个未知数——“二元”；
- ③含有未知数的项的次数为1——“一次”。

【注意】

含有未知数的项的次数为1”切不可理解成两个未知数的次数都为1。

例如方程 $2xy + 2 = 0$ 中含有两个未知数，且未知数的次数都是1，但是含未知数项“ $2xy$ ”的次数是2，所以它不是二元一次方程。

2. 二元一次方程的解

一般地，使二元一次方程两边的值相等的两个未知数的值，叫做二元一次方程的解。

例如 $\begin{cases} x = 3 \\ y = 4 \end{cases}$, $\begin{cases} x = 2 \\ y = 6 \end{cases}$ 都是二元一次方程 $2x + y = 10$ 的解。

【注意】

- ①在二元一次方程中，给定其中一个未知数的值，就可以求出另一个未知数的值。
- ②一般情况下，二元一次方程有无数个解，但并不是说任何一对数值就是它的解。

3. 二元一次方程的整数解

求二元一次方程的整数解的方法：

- ① 首先用一个未知数表示另一个未知数，如 $y = 10 - 2x$ ；
- ② 给定 x 一个值，求出 y 的一个对应值，就可以得到二元一次方程的一组解；
- ③ 根据题意对未知数 x 、 y 进行限制，确定 x 的可能取值，进而确定二元一次方程所有的整数解。

【注意】

求二元一次方程的整数解要注意两点：一要正确，“正确”的标准是两个未知数的值都必须符合题意，且适合此方程；二要不重不漏，可根据题意把其中一个未知数按一定顺序验证求解。

4. 二元一次方程组的概念

方程组中有两个未知数，含有每个未知数的项的次数都是1，并且一共有两个方程，像这样的方程组叫做二元一次方程组。

例如 $\begin{cases} 2x - y = 8 \\ 3x + y = 7 \end{cases}$, $\begin{cases} x = 1 \\ x - y = 2 \end{cases}$ 都是二元一次方程组。

二元一次方程组的一般形式

二元一次方程组的一般形式是： $\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases}$ ，其中 a_1, a_2 不同时为0， b_1, b_2 不同时为0。

判定一个方程组是二元一次方程组的必须满足的条件

- ①方程组中共含有两个未知数；
- ②每个方程都是一次方程。

【注意】二元一次方程组不一定是由两个二元一次方程合在一起，其中有的方程可以只有一元一次方程。如 $\begin{cases} 2x = 6 \\ 3x - y = 1 \end{cases}$ ， $\begin{cases} x = 8 \\ y = 5 \end{cases}$ 都是二元一次方程组。

5. 二元一次方程组的解

一般地，二元一次方程组的两个方程的公共解，叫做二元一次方程组的解。

【注意】

- ①二元一次方程组的解必须满足方程组中的每一个方程，同时它也必须是一个数对，而不能是一个数，用大括号将它们联立起来。
- ②一般常见的二元一次方程组有唯一解，但有的方程组有无数多个解，如 $\begin{cases} x - y = 2 \\ 2x - 2y = 4 \end{cases}$ ，有的方程组无解，如 $\begin{cases} x + y = 5 \\ 2x + 2y = 8 \end{cases}$ 。
- ③检验方程组的解的方法就是将一对数值分别代入方程组中的每一个方程，只有这对数值满足所有方程时，才能说这对数值是此方程组的解；如果这对数值不满足其中的某一个方程，那么它就不是此方程组的解。

练习4

50. 若 $(k-2)x^{|k|-1} - 3y = 2$ 是关于 x, y 的二元一次方程，那么 $k^2 - 3k - 2$ 的值为（ ）。
- A. 8 B. 8或-4 C. -8 D. -4

【答案】A

【解析】根据题意得： $\begin{cases} k-2 \neq 0 \\ |k|-1=1 \end{cases}$ ，

解得： $k = -2$ ，

$\therefore k^2 - 3k - 2 = (-2)^2 - 3 \times (-2) - 2 = 4 + 6 - 2 = 8$ 。

【标注】【知识点】由二元一次方程定义求参数的值

51. 若 $(2x + 3y - 12)^2 + |x - 2y + 1| = 0$ ，则 $x^y = ()$ 。
- A. 9 B. 12 C. 27 D. 64

【答案】A

【解析】 $\begin{cases} 2x + 3y - 12 = 0 \\ x - 2y + 1 = 0 \end{cases}$, 解得 $\begin{cases} x = 3 \\ y = 2 \end{cases}$.
 $\therefore x^y = 3^2 = 9$.

故选：A.

【标注】【知识点】非负性的应用

52. 甲、乙两人同求方程 $ax - by = 7$ 的整数解，甲正确地求出一个解为 $\begin{cases} x = 1 \\ y = -1 \end{cases}$ ，乙把 $ax - by = 7$ 看成 $ax - by = 1$ ，求得一个解为 $\begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \end{cases}$ ，则 a, b 的值分别为 ()
- A. $\begin{cases} a = 2 \\ b = 5 \end{cases}$ B. $\begin{cases} a = 5 \\ b = 2 \end{cases}$ C. $\begin{cases} a = 3 \\ b = 5 \end{cases}$ D. $\begin{cases} a = 5 \\ b = 3 \end{cases}$

【答案】B

【解析】把 $\begin{cases} x = 1 \\ y = -1 \end{cases}$ 代入 $ax - by = 7$ 中得：

$$a + b = 7 \text{ ①},$$

把 $\begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \end{cases}$ 代入 $ax - by = 1$ 中得：

$$a - 2b = 1 \text{ ②},$$

把①②组成方程组得： $\begin{cases} a + b = 7 \text{ ①} \\ a - 2b = 1 \text{ ②} \end{cases}$,

$$\text{解得：} \begin{cases} a = 5 \\ b = 2 \end{cases}.$$

【标注】【知识点】二元一次方程组的看错系数问题

53. 已知关于 x, y 的方程组 $\begin{cases} x + 3y = 4 - a \\ x - y = 3a \end{cases}$ ，其中 $-3 \leq a \leq 1$ ，给出下列说法：
- ①当 $a = 1$ 时，方程组的解也是方程 $x + y = 2 - a$ 的解；②当 $a = -2$ 时， x, y 的值互为相反数；③若 $x \leq 1$ ，则 $1 \leq y \leq 4$ ；④ $\begin{cases} x = 4 \\ y = -3 \end{cases}$ 是方程组的解，其中说法正确的是 () .
- A. ①②③④ B. ①②③ C. ②④ D. ②③

【答案】D

【解析】 $\begin{cases} x + 3y = 4 - a \\ x - y = 3a \end{cases}$,
解得 $\begin{cases} x = 1 + 2a \\ y = 1 - a \end{cases}$,

当 $a = 1$ 时, $x = 1 + 2 \times 1 = 3$, $y = 0$,

代入 $x + y = 2 - 1$ 中可知方程左右两边不等,

$\therefore$ ①错误.

当 $a = -2$ 时, $x = 1 + 2 \times (-2) = 1 - 4 = -3$, $y = 1 - (-2) = 3$,

此时 x, y 互为相反数,

$\therefore$ ②正确.

$\because x \leq 1$,

$\therefore 1 + 2a \leq 1$,

$2a \leq 0$,

$a \leq 0$,

$\therefore -3 \leq a \leq 1$,

$\therefore -3 \leq a \leq 0$,

$\therefore 3 \geq -a \geq 0$,

$\therefore 1 \leq 1 - a \leq 4$,

即 $1 \leq y \leq 4$,

$\therefore$ ③正确.

$\because -3 \leq a \leq 1$,

$\therefore 3 \geq -a \geq -1$,

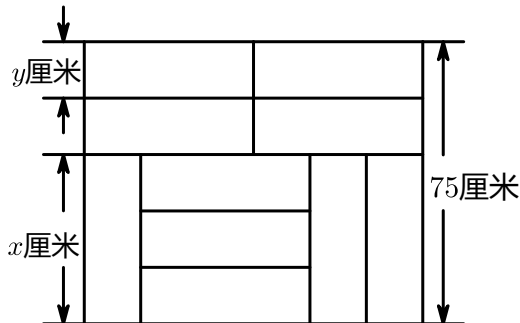
$\therefore 0 \leq 1 - a \leq 4$, 即 $0 \leq y \leq 4$,

$\therefore y \neq -3$,

$\therefore \begin{cases} x = 4 \\ y = -3 \end{cases}$ 不是方程组的解, 即④错误.

【标注】【知识点】代入消元法解二元一次方程组

54. 如图, 10块相同的小长方形墙砖拼成一个大长方形, 设小长方形墙砖的长为 x , 宽为 y , 则依题意列二元一次方程组正确的是 ().



A. $\begin{cases} 5x + 2y = 75 \\ y = 3x \end{cases}$

B. $\begin{cases} 2x + y = 75 \\ y = 3x \end{cases}$

C. $\begin{cases} x + 2y = 75 \\ x = 3y \end{cases}$

D. $\begin{cases} 2x + y = 75 \\ x = 3y \end{cases}$

【答案】C

【解析】设小长方形墙砖的长为 $x\text{cm}$ ，宽为 $y\text{cm}$ ，则依题意得：

$$\begin{cases} x + 2y = 75 \\ 3y = x \end{cases}.$$

【标注】【知识点】二元一次方程组的几何问题

55. 若方程组 $\begin{cases} x + 2y = 2k - 3 \\ 2x + y = k \end{cases}$ 的解适合 $x + y = 2$ ，则 k 的值为 _____ .

【答案】3

【解析】两式相加得，

$$3(x + y) = 3k - 3,$$

由 $x + y = 2$ 得，

$$3k - 3 = 6,$$

解得 $k = 3$.

【标注】【知识点】根据解的等量关系解含参的二元一次方程组

56. 方程组 $\begin{cases} x + 2y + z = 0 \\ 2x - y - z = 1 \\ 3x - y - z = 2 \end{cases}$ 的解是 _____ .

【答案】 $\begin{cases} x = 1 \\ y = -2 \\ z = 3 \end{cases}$

【解析】 $\begin{cases} x + 2y + z = 0 \text{①} \\ 2x - y - z = 1 \text{②} \\ 3x - y - z = 2 \text{③} \end{cases}$

$$\text{②}-\text{③得}, -x = -1,$$

$$\therefore x = 1,$$

$$\text{将 } x = 1 \text{ 代入①得}, 2y + z = -1 \text{④},$$

$$\text{将 } x = 1 \text{ 代入②得}, y + z = 1 \text{⑤},$$

$$\text{④}-\text{⑤得},$$

$$y = -2,$$

$$\text{将 } y = -2 \text{ 代入⑤得},$$

$$z = 3,$$

$$\therefore \begin{cases} x = 1 \\ y = -2 \\ z = 3 \end{cases}.$$

【标注】【知识点】解三元一次方程组

57. 已知实数 x, y 满足方程组 $\begin{cases} 2x + 5y + 4 = 0 \\ 3x - 4y = 17 \end{cases}$, 求 $\sqrt{4x - 2y}$ 的平方根.

【答案】 ± 2 .

【解析】 $\begin{cases} 2x + 5y + 4 = 0 \textcircled{1} \\ 3x - 4y = 17 \textcircled{2} \end{cases},$

$\textcircled{1} \times 3$ 得 $6x + 15y = -12 \textcircled{3}$,

$\textcircled{3} \times 2$ 得 $6x - 8y = 34 \textcircled{4}$.

$\textcircled{3} - \textcircled{4}$ 得 $23y = -46$,

$\therefore y = -2$,

$\therefore \sqrt{4x - 2y} = \sqrt{16} = 4$,

$\therefore \sqrt{4x - 2y}$ 的平方根为 ± 2 .

【标注】【知识点】加减消元法解二元一次方程组

58. 已知关于 x, y 的方程组 $\begin{cases} x - y = 1 + 3a \\ x + y = -7 - a \end{cases}$ 的解 x 为非正数, y 为负数.

(1) 求 a 的取值范围.

(2) 结合 (1) 中 a 的取值范围, 当 a 为何整数时, 不等式 $2ax + x > 2a + 1$ 的解集为 $x < 1$.

【答案】(1) $-2 < a \leq 3$.

(2) $a = -1$.

【解析】(1) $\begin{cases} x - y = 1 + 3a \textcircled{1} \\ x + y = -7 - a \textcircled{2} \end{cases},$

$\textcircled{1} + \textcircled{2}$ 得, $2x = -6 + 2a$,

$\therefore x = -3 + a$,

$\textcircled{1} - \textcircled{2}$ 得, $-2y = 1 + 3a + 7 + a$,

$-2y = 4a + 8$,

$\therefore y = -2a - 4$,

$\therefore x \leq 0, y < 0$,

$\therefore -3 + a \leq 0$,

$a \leq 3$,

$$-2a - 4 < 0 ,$$

$$-2a < 4 ,$$

$$a > -2 ,$$

$$\therefore -2 < a \leq 3 .$$

$$(2) -2 < a \leq 3 ,$$

$$\therefore 2ax + x > 2a + 1 ,$$

$$\therefore (2a + 1)x > 2a + 1 ,$$

$$\therefore \text{不等式解集为 } x < 1 ,$$

$$\therefore 2a + 1 < 0 ,$$

$$2a < -1 ,$$

$$a < -\frac{1}{2} ,$$

$$\therefore -2 < a < -\frac{1}{2} ,$$

$$\therefore a \text{ 为整数} ,$$

$$\therefore a = -1 .$$

【标注】【知识点】由不等式（组）的解集求参数的范围

59. 某种仪器由1个A部件和1个B部件配套构成，每个工人每天可以加工A部件1000个或者加工B部件600个，现有工人16名，应怎样安排人力，才能使每天生产的A部件和B部件配套？

【答案】安排6人生产A部件，安排10人生产B部件．

【解析】方法一：设安排 x 人生产A部件，安排 y 人生产B部件，

$$\text{由题意，得：} \begin{cases} x + y = 16 \\ 1000x = 600y \end{cases} ,$$

$$\text{解得：} \begin{cases} x = 6 \\ y = 10 \end{cases} .$$

答：安排6人生产A部件，安排10人生产B部件，才能使每天生产的A部件和B部件配套．

方法二：设安排 x 人生产A部件，则安排 $(16 - x)$ 人生产B部件，

$$\text{根据题意，得：} 1000x = 600(16 - x) ,$$

$$\text{解得 } x = 6 , \text{ 所以 } 16 - x = 16 - 6 = 10 .$$

答：应安排6人生产A部件，10人生产B部件，才能使每天生产的A部件和B部件配套．

【标注】【知识点】二元一次方程组的配套问题

60. 我国古代数学著作《九章算术》中有这样一题，原文是：“今有大器五小器一容三斛，大器一小器五容二斛，问大小器各容几何。”意思是：有大小两种盛酒的桶，已知5个大桶加上1个小桶可以盛酒3斛（斛，是古代的一种容量单位），1个大桶加上5个小桶可以盛酒2斛．1个大桶、1个小桶分别可以盛酒多少斛？请解答．

【答案】 1个大桶可以盛酒 $\frac{13}{24}$ 斛，1个小桶可以盛酒 $\frac{7}{24}$ 斛．

【解析】 设1个大桶可以盛酒 x 斛，1个小桶可以盛酒 y 斛，

$$\text{则} \begin{cases} 5x + y = 3 \\ x + 5y = 2 \end{cases},$$

$$\text{解得:} \begin{cases} x = \frac{13}{24} \\ y = \frac{7}{24} \end{cases},$$

答：1个大桶可以盛酒 $\frac{13}{24}$ 斛，1个小桶可以盛酒 $\frac{7}{24}$ 斛．

【标注】【知识点】二元一次方程组的和差倍分

61. 甲、乙两人从相距36千米的两地相向而行．如果甲比乙先走2小时，那么他们在乙出发后经2.5小时相遇；如果乙比甲先走2小时，那么他们在甲出发后经3小时相遇．求甲、乙两人每小时各走多少千米？

【答案】 甲每小时走6千米，乙每小时走3.6千米．

【解析】 设甲每小时走 x 千米，乙每小时走 y 千米．根据题意，列方程组

$$\begin{cases} 2x + 2.5x + 2.5y = 36 \\ 3x + 2y + 3y = 36 \end{cases},$$

$$\text{解这个方程组，得} \begin{cases} x = 6 \\ y = 3.6 \end{cases}.$$

答：甲每小时走6千米，乙每小时走3.6千米．

【标注】【知识点】二元一次方程组的行程问题

五、不等式与不等式（组）

1. 不等式的概念

1、概念：

（1）用不等号表示大小关系的式子，叫做不等式．

例： $a+3 > -1+4$ ， $-5 < -2$ ， $|x| \geq 0$ ， $x+1 \leq 0$ ， $a+2 \neq a-2$ 。

(2) 常见的不等号有5种： $>$ 、 $<$ 、 $\geq$ 、 $\leq$ 、 $\neq$ 。

2、不等式的解：使不等式成立的未知数的值，叫做不等式的解。

例： -4 ， -2 ， 0 ， 1 ， 2 都是不等式 $x \leq 2$ 的解，当然它的解还有许多。

判断某个未知数的值是否为不等式的解，直接将该数值代入不等式，看不等式是否成立，若成立，则是不等式的解；若不成立，则不是。

3、不等式的解集：一般地，一个含有未知数的不等式的所有解，组成这个不等式的解集。

不等式的解集是一个集合，是一个范围，其含义：

- ①解集中的每一个数值都能使不等式成立；
- ②能够使不等式成立的所有数值都在解集中。

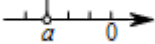
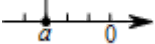
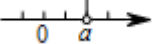
4、不等式解集的表示方法：

(1) 用不等式表示：

一般地，一个含有未知数的不等式有无数个解，它的解集是某个范围，这个范围可用一个最简单的不等式 $x > a$ （或 $x \geq a$ ）， $x < a$ （或 $x \leq a$ ）的形式表示。

(2) 用数轴表示：

①解集与数轴的对应关系如图所示：

$x > a$	$x \geq a$	$x < a$	$x \leq a$
			

解集 $x > a$ 用 a 点右边的点来表示，表示 a 的点画成空心圆圈。

解集 $x < a$ 用 a 点左边的点来表示，表示 a 的点画成空心圆圈。

解集 $x \geq a$ 用表示 a 的点和它右边的点来表示，表示 a 的点画成实心圆点。

解集 $x \leq a$ 用表示 a 的点和它左边的点来表示，表示 a 的点画成实心圆点。

②用数轴表示不等式的解集时要“两定”：一是定边界点，二是定方向。

2. 不等式基本性质

(1) 基本性质1：

不等式两边加（或减）同一个数（或式子），不等号的方向不变。

如果 $a > b$ ，那么 $a \pm c > b \pm c$ 。

(2) 基本性质2：

不等式两边乘（或除以）同一个正数，不等号的方向不变。

如果 $a > b$ ，并且 $c > 0$ ，那么 $ac > bc$ （或 $\frac{a}{c} > \frac{b}{c}$ ）。

(3) 基本性质3：

不等式两边乘（或除以）同一个负数，不等号的方向改变．

如果 $a > b$ ，并且 $c < 0$ ，那么 $ac < bc$ （或 $\frac{a}{c} < \frac{b}{c}$ ）

3. 一元一次不等式

1、一元一次不等式定义：

（1）含有一个未知数，未知数的次数是1的不等式，叫做一元一次不等式．

（2）一般式是 $ax > b$ 或 $ax < b$ （ $a \neq 0$ ）．

【方法】一元一次不等式满足的条件：

①不等式的两边都是整式；

②不等式中只含有一个未知数；

③未知数的次数是1．

2、一元一次不等式的解集：

一元一次不等式的所有解组成的集合叫做一元一次不等式的解集．

【注意】不等式的解集一般是一个取值范围，但有时候要求未知数的某些特殊解，如求整数解、正整数解、非负整数解，最大整数解等，解答这类问题的关键是明确解的特征．

4. 一元一次不等式组

含有相同未知数的几个一元一次不等式所组成的不等式组，叫做一元一次不等式组．

如 $\begin{cases} x > 1 \\ 2x < 5 \end{cases}$ ， $\begin{cases} x - 3 \geq 0 \\ x + 8 < 4x - 1 \\ x + 2 < 8 \end{cases}$ 是一元一次不等式组．

定义中的“几个”并没有确定个数，但必须是两个或两个以上．

【方法】判断一个不等式组是否为一元一次不等式组，要从以下两个方面考虑：

①组成不等式组的每一个不等式必须是一元一次不等式．

②整个不等式组中只含有一个未知数．

5. 一元一次不等式组的解集

（1）一般地，几个一元一次不等式解集的公共部分，叫做由它们所组成的一元一次不等式组的解集．

（2）找几个不等式的解集的公共部分的方法：

①先将几个不等式的解集在同一数轴上表示出来，然后找出它们重叠部分．

②当几个不等式的解集没有公共部分时，称这个不等式组无解（解集为空集）．

一元一次不等式组解集的四种基本类型

不等式组 ($a < b$)	图示	解集	口诀
$\begin{cases} x \geq a \\ x \geq b \end{cases}$		$x \geq b$	同大取大
$\begin{cases} x \leq a \\ x \leq b \end{cases}$		$x \leq a$	同小取小
$\begin{cases} x \geq a \\ x \leq b \end{cases}$		$a \leq x \leq b$	大小小大中间找
$\begin{cases} x \leq a \\ x \geq b \end{cases}$		无解	大大小小找不到

练习5

62. 已知 $a < b$ ，下列结论正确的是 () .

A. $a + m > b + m$

B. $a - m > b - m$

C. $-2a > -2b$

D. $\frac{a}{2} > \frac{b}{2}$

【答案】C

【解析】A 选项：左右两边同时加上同一个数，不等号方向不变，故错误 .

B 选项：不等式左右两边同时减去一个相同的数，不等号方向不变，故错误 .

C 选项：不等式左右两边同时乘以同一个负数，不等号方向改变，故正确 .

D 选项：不等式左右两边同时除以同一个正数，不等号方向不变，故错误 .

故选 C .

【标注】【知识点】不等式的性质

63. 若 $x < y$ ，且 $(a + 5)x > (a + 5)y$ ，则 a 的取值范围 () .

A. $a > -5$

B. $a \geq -5$

C. $a < -5$

D. $a < 5$

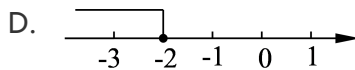
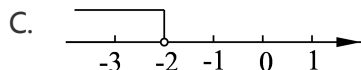
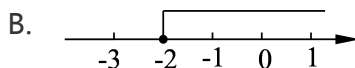
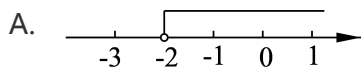
【答案】C

【解析】 $\because x < y$ ，且 $(a + 5)x > (a + 5)y$ ，

$\therefore a + 5 < 0$ ，即 $a < -5$.

【标注】【知识点】利用不等式性质解不等式

64. 若把不等式 $1 - 3x < 7$ 的解集在数轴上表示出来，则正确的是（ ）.



【答案】A

【解析】 $1 - 3x < 7$,

$$-3x < 6,$$

$$x > -2.$$

故选：A.

【标注】【知识点】在数轴上表示不等式的解集

65. 已知 $ab = 4$ ，若 $-2 \leq b \leq -1$ ，则 a 的取值范围是（ ）.

A. $a \geq 4$

B. $a \geq -2$

C. $-4 \leq a \leq -2$

D. $-4 \leq a \leq -1$

【答案】C

【解析】根据已知条件可以求得 $b = \frac{4}{a}$ ，然后将 b 的值代入不等式 $-2 \leq b \leq -1$ ，通过解该不等式即可求得 a 的取值范围.

由 $ab = 4$ 得，

$$b = \frac{4}{a},$$

$$\therefore -2 \leq b \leq -1,$$

$$\therefore -2 \leq \frac{4}{a} \leq -1,$$

$$\therefore -4 \leq a \leq -2.$$

【标注】【知识点】不等式的性质

【能力】运算能力

66. 某次“迎奥运”知识竞赛中共20道题，对于每一道题，答对得10分，答错或不答扣5分，选手至少要答对（ ）道题，其得分才会不少于95分？

A. 14

B. 13

C. 12

D. 11

【答案】 B**【解析】** 设答对 x 道, 则答错或不答的题目有 $(20 - x)$ 个.

$$\text{即 } 10x - 5(20 - x) \geq 95,$$

$$\text{去括号: } 10x - 100 + 5x \geq 95,$$

$$\therefore 15x \geq 195,$$

$$x \geq 13.$$

【标注】【知识点】一元一次不等式的实际应用

67. 若关于 x 的不等式 $mx - n > 0$ 的解集是 $x < \frac{1}{5}$, 则关于 x 的不等式 $(m + n)x > n - m$ 的解集是 _____.

【答案】 $x < -\frac{2}{3}$ **【解析】** $\because$ 不等式 $mx - n > 0$ 解集为 $x < \frac{1}{5}$

$$\therefore m < 0 \text{ 且 } \frac{n}{m} = \frac{1}{5}$$

$$\therefore m = 5n, n < 0$$

$$\therefore \text{不等式 } (m + n)x > n - m \text{ 可整理为: } 6nx > -4n$$

$$\therefore x < -\frac{2}{3}.$$

【标注】【知识点】由不等式(组)的解集求参数的范围

68. 已知关于 x 、 y 的方程组 $\begin{cases} 2x + y = 1 + 3m \\ x + 2y = 1 - m \end{cases}$ 的解 x 、 y 满足 $x + y < 0$, 则 m 的取值范围是 _____.

【答案】 $m < -1$ **【解析】** 两式相加得 $x + y = \frac{2 + 2m}{3}$, $\frac{2 + 2m}{3} < 0$, 得 $m < -1$.**【标注】**【知识点】二元一次方程组解的情况

69. 若不等式组 $\begin{cases} x > a \\ x - 2 < 3 \end{cases}$ 只有2个整数解, 则 a 的取值范围为 _____.

【答案】 $2 \leq a < 3$

【解析】 由 $x - 2 < 3$ 得: $x < 5$, 有两个整数解.

$$\therefore x = 3 \text{ 或 } x = 4,$$

$$\therefore x > a,$$

$$\therefore 2 \leq a < 3.$$

【标注】 【知识点】由不等式(组)的整数解情况求参数范围

70. 已知关于 x 的不等式组 $\begin{cases} 5x + 2 > 3(x - 1) \\ \frac{1}{2}x \leq 8 - \frac{3}{2}x + 2a \end{cases}$ 有四个整数解, 则实数 a 的取值范围是 _____.

【答案】 $-3 \leq a < -2$

【解析】
$$\begin{cases} 5x + 2 > 3(x - 1) \text{ ①} \\ \frac{1}{2}x \leq 8 - \frac{3}{2}x + 2a \text{ ②} \end{cases},$$

解不等式①, 得 $5x + 2 > 3x - 3$,

$$2x > -5,$$

$$x > -\frac{5}{2}.$$

解不等式②, 得 $2x \leq 8 + 2a$,

$$x \leq a + 4,$$

$$\therefore \text{该不等式组的解集为 } -\frac{5}{2} < x \leq a + 4.$$

$\therefore$ 该不等式组有四个整数解,

$\therefore$ 四个整数解分别为 $-2, -1, 0, 1$,

$$\therefore 1 \leq a + 4 < 2,$$

$$\text{解得 } -3 \leq a < -2.$$

【标注】 【知识点】由不等式(组)的整数解情况求参数范围

71. 已知 $x - y = 3$, 且 $x > 2, y < 1$, 则 $x + y$ 的取值范围是 _____.

【答案】 $1 < x + y < 5$

【解析】 $\therefore x - y = 3$,

$$\therefore x = y + 3,$$

$$\therefore x > 2,$$

$$\begin{aligned}
&\therefore y + 3 > 2, \\
&\therefore y > -1, \\
&\text{又 } y < 1, \\
&\therefore -1 < y < 1, \\
&\therefore x = y + 3, \\
&\therefore x + y = y + 3 + y = 2y + 3, \\
&\therefore -1 < y < 1, \\
&\therefore -2 < 2y < 2, \\
&\therefore 1 < 2y + 3 < 5, \\
&\text{即 } 1 < x + y < 5.
\end{aligned}$$

【标注】【知识点】不等式的性质

【能力】运算能力

72. 若方程组 $\begin{cases} 4x + y = k + 1 \\ x + 4y = 3 \end{cases}$ 的解满足条件 $0 < x + y < 2$ ，则 k 的取值范围是 _____.

【答案】 $-4 < k < 6$

【解析】 $\begin{cases} 4x + y = k + 1 \text{ ①} \\ x + 4y = 3 \text{ ②} \end{cases},$

①+②得 $5x + 5y = k + 4.$

$\therefore 0 < x + y < 2,$

$\therefore 0 < 5x + 5y < 10,$

$\therefore 0 < k + 4 < 10,$

$\therefore -4 < k < 6.$

【标注】【知识点】解一元一次不等式组

73. 已知实数 x 满足 $\begin{cases} 5(x+1) \geq 3x-1 \\ \frac{1}{2}x-1 \leq 7-\frac{3}{2}x \end{cases}$ ，若 $S = |x-1| + |x+1|$ 的最大值为 m ，最小值为 n ，则 $mn =$ _____.

【答案】 16

【解析】 $\begin{cases} 5(x+1) \geq 3x-1 \text{ ①} \\ \frac{1}{2}x-1 \leq 7-\frac{3}{2}x \text{ ②} \end{cases},$

由①得 $5x + 5 \geq 3x - 1,$

$$2x \geq -6,$$

$$x \geq -3.$$

$$\text{由②得 } \frac{1}{2}x + \frac{3}{2}x \leq 7 + 1,$$

$$2x \leq 8,$$

$$x \leq 4,$$

$$\therefore -3 \leq x \leq 4.$$

$$S = |x - 1| + |x + 1|,$$

$$\text{令 } x - 1 = 0, x + 1 = 0,$$

$$\therefore x = 1, x = -1.$$

$$\text{当 } x \leq -3 \text{ 时, } S = 1 - x - x - 1 = -2x.$$

$$\text{当 } -3 \leq x \leq -1 \text{ 时, } S = 1 - x - x - 1 = -2x.$$

$$\text{当 } -1 < x \leq 1 \text{ 时, } S = 1 - x + x + 1 = 2.$$

$$\text{当 } 1 < x \leq 4 \text{ 时, } S = x - 1 + x + 1 = 2x.$$

$$\text{当 } x > 4 \text{ 时, } S = x - 1 + x + 1 = 2x.$$

$$\therefore S \text{ 的最大值 } m = 8, \text{ 最小值 } n = 2,$$

$$\therefore mn = 16.$$

【标注】【知识点】解一元一次不等式组

74. 解不等式 $1 + \frac{x+1}{2} \geq 2 - \frac{x+7}{3}$, 并求出其最小整数解.

【答案】 $x = -2$.

【解析】 解不等式 $1 + \frac{x+1}{2} \geq 2 - \frac{x+7}{3}$,

$$\text{去分母, } 6 + 3(x+1) \geq 12 - 2(x+7),$$

$$\text{去括号, } 6 + 3x + 3 \geq 12 - 2x - 14,$$

$$\text{移项, } 3x + 2x \geq 12 - 14 - 3 - 6,$$

$$\text{合并同类项, } 5x \geq -11,$$

$$\text{可得, } x \geq -\frac{11}{5},$$

$$\text{故最小整数解为 } x = -2.$$

【标注】【知识点】解一元一次不等式

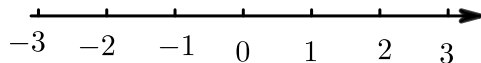
75. 解不等式组 $\begin{cases} 3x \geq 4x - 1 \text{ ①} \\ \frac{5x-1}{2} > x - 2 \text{ ②} \end{cases}$.

请结合题意填空，完成本题的解答．

(1) 解不等式①，得 _____ ．

(2) 解不等式②，得 _____ ．

(3) 把不等式①和②的解集在数轴上表示出来．



(4) 原不等式组的解集为 _____ ．

【答案】 (1) $x \leq 1$

(2) $x > -1$

(3) 画图见解析．

(4) $-1 < x \leq 1$

【解析】 (1) 移项， $3x - 4x \geq -1$ ，

合并同类项， $-x \geq -1$ ，

系数化为1， $x \leq 1$ ，

$\therefore x \leq 1$ ．

(2) 去分母， $5x - 1 > 2x - 4$ ，

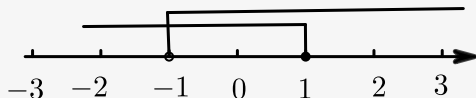
移项， $5x - 2x > 1 - 4$ ，

合并同类项， $3x > -3$ ，

系数化为1， $x > -1$ ，

$\therefore x > -1$ ．

(3)



(4) 原不等式组的解集为 $-1 < x \leq 1$ ．

【标注】【知识点】在数轴上表示不等式组的解集

76. 某学校为了庆祝校园艺术节，准备购买一批盆花布置校园．已知1盆A种花和2盆B种花一共需13元，2盆A种花和1盆B种花一共需11元．

(1) 求1盆A种花和1盆B种花的售价各是多少元？

(2) 学校准备购进这两种盆花共100盆，并且A种盆花的数量不超过B种盆花数量的2倍，请求出A种盆花的数量最多是多少？

【答案】 (1) 1盆A种花3元, 1盆B种花5元.

(2) A种花最多购进66盆.

【解析】 (1) 设1盆A种花 x 元, 1盆B种花 y 元,

$$\text{由题意可知} \begin{cases} x + 2y = 13 \\ 2x + y = 11 \end{cases}$$

$$\text{解得} \begin{cases} x = 3 \\ y = 5 \end{cases}$$

答: 1盆A种花3元, 1盆B种花5元.

(2) 设购进A种花 m 盆, 则B种花为 $(100 - m)$ 盆,

由题意可得 $m \leq 2(100 - m)$,

$$3m \leq 200,$$

$$m \leq \frac{200}{3},$$

$\because m$ 为正整数,

$$\therefore m = 66,$$

答: A种花最多购进66盆.

【标注】【知识点】二元一次方程组的数字问题

77. 某公司准备把240吨白砂糖运往A、B两地, 用大、小两种货车共20辆, 恰好能一次性装完这批白砂糖, 相关数据见下表:

	载重量	运往A地的费用	运往B地的费用
大车	15吨/辆	630元/辆	750元/辆
小车	10吨/辆	420元/辆	550元/辆

(1) 求大、小两种货车各用多少辆?

(2) 如果安排10辆货车前往A地, 其中大车有 m 辆, 其余货车前往B地, 且运往A地的白砂糖不少于115吨,

① 求 m 的取值范围.

② 请你设计出使总运费最少的货车调配方案, 并求出最少总运费.

【答案】 (1) 大货车用8辆. 小货车用12辆.

(2) ① $3 \leq m \leq 8$.

② 应安排3辆大车和7辆小车前往A地, 安排5辆大车和5辆小车前往B地, 最少运费为11330元.

【解析】 (1) 设大货车用 x 辆, 则小货车用 $(20 - x)$ 辆,

$$15x + 10(20 - x) = 240 ,$$

解得： $x = 8$,

$$20 - x = 20 - 8 = 12 \text{ (辆)} ,$$

答：大货车用8辆．小货车用12辆．

(2)① 调往A地的大车有 m 辆，则到A地的小车有 $(10 - m)$ 辆，由题意得：

$$15m + 10(10 - m) \geq 115 ,$$

解得： $m \geq 3$,

$\therefore$ 大车共有8辆，

$$\therefore 3 \leq m \leq 8 .$$

② 设总运费为 W 元，

$\therefore$ 调往A地的大车有 m 辆，则到A地的小车有 $(10 - m)$ 辆，

$\therefore$ 到B的大车 $(8 - m)$ 辆，到B的小车有 $[12 - (10 - m)] = (2 + m)$ 辆，

$$W = 630m + 420(10 - m) + 750(8 - m) + 550(2 + m) ,$$

$$= 630m + 4200 - 420m + 6000 - 750m + 1100 + 550m ,$$

$$= 10m + 11300 .$$

又 $\therefore W$ 随 m 的增大而增大，

$\therefore$ 当 $m = 3$ 时， W 最小．

$$\text{当 } m = 3 \text{ 时， } W = 10 \times 3 + 11300 = 11330 .$$

因此，应安排3辆大车和7辆小车前往A地，安排5辆大车和5辆小车前往B地，

最少运费为11330元．

【标注】【知识点】一元一次方程与实际问题

【知识点】不等式组应用

【知识点】一次函数与实际问题

【能力】分析和解决问题能力

【能力】运算能力

78. 某电器商城销售A、B两种型号的电风扇，进价分别为160元、120元，下表是近两周的销售情况：

销售时段	销售数量		销售收入
	A种型号	B种型号	
第一周	3台	4台	1200元
第二周	5台	6台	1900元

(1) 求A、B两种型号的电风扇的销售单价．

(2)

若商城准备用不多于7500元的金额再采购这两种型号的电风扇共50台，求A种型号的电风扇最多能采购多少台？

- (3) 在(2)的条件下，商城销售完这50台电风扇能否实现利润超过1850元的目标？若能，请给出相应的采购方案；若不能，请说明理由。

【答案】 (1) A、B两种型号的电风扇的销售单价分别为200元和150元。

(2) 最多采购A型号37台。

(3) 当购买A型号36台或37台时，可以实现利润超过1850元。

【解析】 (1) 设A、B两种型号的电风扇的销售单价分别为 x 元， y 元，

$$\begin{cases} 3x + 4y = 1200 \\ 5x + 6y = 1900 \end{cases}$$

解得 $\begin{cases} x = 200 \\ y = 150 \end{cases}$

$\therefore$ A、B两种型号的电风扇的销售单价分别为200元和150元。

(2) 设A型号采购了 a 台，则B型号采购 $(50 - a)$ 台，

$$160a + 120(50 - a) \leq 7500,$$

$$160a + 6000 - 120a \leq 7500,$$

$$40a \leq 1500,$$

$$a \leq 37.5,$$

$\because a$ 为整数，

$\therefore$ 最多采购A型号37台。

(3) $(200 - 160)a + (150 - 120)(50 - a) > 1850,$

$$40a + 30(50 - a) > 1850,$$

$$40a + 1500 - 30a > 1850,$$

$$10a > 350,$$

$$a > 35,$$

$$\therefore a \leq 37.5,$$

$\therefore$ 当 $a = 36$ 或 $a = 37$ 时，能实现利润超过1850元。

$\therefore$ 当购买A型号36台或37台时，可以实现利润超过1850元。

【标注】【知识点】不等式组的方案选择问题

79. 旭日商场销售A、B两种品牌的钢琴，这两种钢琴的进价和售价如下表所示：

	A	B
进价（万元/套）	1.5	1.2

售价（万元/套）	1.65	1.4
----------	------	-----

该商场计划购进两种钢琴若干套，共需66万元，全部销售后可获毛利润9万元。（毛利润=（售价-进价）×销售量）

- （1）该商场计划购进A，B两种品牌的钢琴各多少套？
- （2）通过市场调查，该商场决定在原计划的基础上，减少A种钢琴的购进数量，增加B种钢琴的购进数量，已知B种钢琴增加的数量是A种钢琴减少数量的1.5倍，若用于购进这两种钢琴的总资金不超过69万元，问A种钢琴购进数量至多减少多少套？

【答案】（1）购进A种20套，B种30套。

（2）A种钢琴至多减少10套。

【解析】（1）设购进A种 x 套，B种 y 套，

$$\begin{cases} 1.5x + 1.2y = 66 \\ (1.65 - 1.5)x + (1.4 - 1.2)y = 9 \end{cases}, \text{得} \begin{cases} x = 20 \\ y = 30 \end{cases}.$$

购进A种20套，B种30套。

（2）设A种钢琴减少 x 套，B种钢琴增加 $1.5x$ 套。

$$1.5(20 - x) + 1.2(30 + 1.5x) \leq 69$$

$$30 - 1.5x + 36 + 1.8x \leq 69$$

$$x \leq 10.$$

A种钢琴至多减少10套。

【标注】【知识点】二元一次方程组的配套问题